УДК 512.17

ТУЛЕШОВ А.К., БОПЕЕВ Т.М., СУХЕНКО А.С., АЛИПБАЕВ К.А.

РАСЧЁТ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА И МОМЕНТА СИЛ ДАВЛЕНИЯ СВЕТА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

Разработки программно-математического обеспечения системы имитационного моделирования космического аппарата (КА) требует детального рассмотрения всех факторов, которые имеют влияния на систему. Вместе с тем, из-за сложности системы и многообразия этих факторов целесообразным является поэтапное моделирование процесса имитации полета КА. В данной статье решается задача вычисления главного вектора и главного момента сил давления света Солнца, действующего на КА при его движении по заданной орбите. Эти силы входят в правую часть уравнений динамики КА, позволяет получить характер изменения углового положения КА в орбите с учетом воздействия этих возмущений.

Любую поверхность тела, в том числе и КА, можно представить в виде множества элементарных фигур. Для оптимального разбиения поверхности КА обычно применяют триангуляцию – разбиение поверхности на треугольники как это показано на рисунке 1.

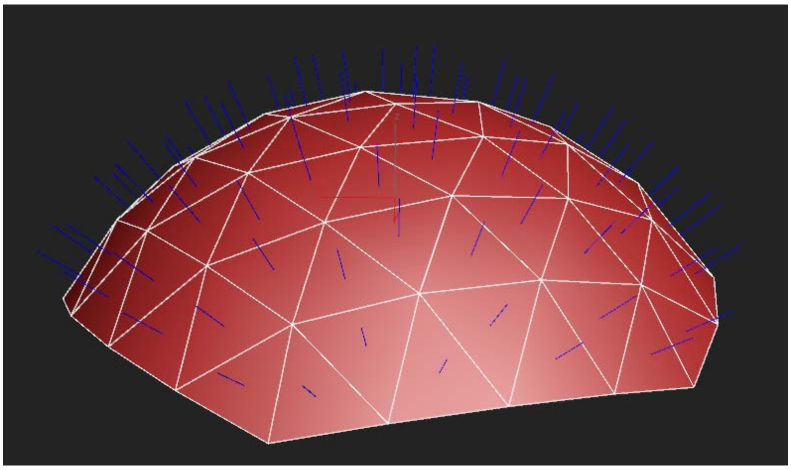

Рисунок 1 – Триангулированная часть поверхности КА

Каждый такой треугольник представляет собой площадку с площадью dS и описывается тремя вершинами с однородными координатами $p_0(x_0, y_0, z_0, q)$, $p_1(x_1, y_1, z_1, q)$, $p_2(x_2, y_2, z_2, q)$ такими, что: $x_i' = x_i / q$, $x_i' = x_i / q$, $z' = z_i / q$, $i = 0..2$, при этом: q- некоторое вещественное число. Однородные координаты обладают тем свойством, что определяемый ими объект не меняется при умножении всех координат на одно и то же число. Примем $OXYZ$ за абсолютную неподвижную систему координат. С центром масс C КА свяжем систему координат $Cxyz$, которая является жёстко связанной с КА. Матрица преобразования для однородных координат имеет размер 4х4. Таким образом, матрица, описывающая угловое положение КА имеет вид [1]:

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где

$$\begin{aligned}
a_{00} &= \cos\gamma \cos\beta, \\
a_{01} &= \cos\alpha \sin\gamma, \\
a_{02} &= -\sin\beta, \\
a_{10} &= \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma - \cos\alpha \sin\gamma, \\
a_{11} &= \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + \cos\alpha \cos\gamma, \\
a_{12} &= \sin\alpha \cos\beta, \\
a_{20} &= \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma + \sin\alpha \sin\gamma, \\
a_{21} &= \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma - \sin\alpha \cos\gamma, \\
a_{22} &= \cos\alpha \cos\beta, \\
a_{03} &= a_{30} = 0, \\
a_{13} &= a_{31} = 0, \\
a_{23} &= a_{32} = 0, \\
a_{33} &= 1,
\end{aligned} \qquad (2)$$

Переход от связанной с центром масс системы координат $Cxyz$ к абсолютной системе координат $OXYZ$ производится путём переноса начала системы координат $Cxyz$ на вектор с координатами a_{30}, a_{31}, a_{32} и путём последовательных трёх поворотов на углы α, β, γ.

Каждому треугольнику с площадью dS соответствует нормаль $\vec{n}_s$ и радиус – вектор её центра масс $\vec{r}_s$, проведённый из центра масс КА. Нормаль $\vec{n}_s$ рассчитывается как векторное произведение двух векторов

$$\vec{n}_s = \overrightarrow{p_0 p_1} \times \overrightarrow{p_0 p_2}, \tag{3}$$

где

$$\overrightarrow{p_0 p_1} = (x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j} + (z_1 - z_0)\vec{j},$$
$$\overrightarrow{p_0 p_2} = (x_2 - x_0)\vec{i} + (y_2 - y_0)\vec{j} + (z_2 - z_0)\vec{j}.$$

Координаты геометрического центра треугольника находятся по формулам

$$\begin{aligned} x_{cs} &= (x_0 + x_1 + x_2)/3, \\ y_{cs} &= (y_0 + y_1 + y_2)/3, \\ z_{cs} &= (z_0 + z_1 + z_2)/3. \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда, зная компоненты a_{30}, a_{31}, a_{32} матрицы (1) можно определить координаты центра масс КА x_c, y_c, z_c и найти величину радиус-вектора центра масс каждого треугольника:

$$\vec{r}_s = (x_c - x_{cs})\vec{i} + (y_c - y_{cs})\vec{j} + (z_c - z_{cs})\vec{k}. \tag{5}$$

Площадь треугольника вычисляется по формуле:

$$dS = \frac{1}{2}\sqrt{n_{sx}^2 + n_{sy}^2 + n_{sz}^2}. \tag{6}$$

2 Численный расчёт главного вектора и момента сил светового давления и вычисление угловых положений КА

В общем случае величина P светового давления на расстоянии Δ от Солнца даётся формулой[2]:

$$P = P_0 \left(\frac{a_0}{\Delta}\right)^2, \tag{7}$$

где

a_0 - среднее расстояние от Земли до Солнца,

$P_0 = E_0 / c = 4.561 \cdot 10^{-6} Н/м^2$ - давление на единичную площадку отражающей поверхности.

Рассмотрим взаимодействие потока света с площадкой dS. Элементарная сила $d\vec{F}$, действующая на такую площадку, будет складываться из силы $d\vec{F_1}$, вызываемой падающим потоком и силы $d\vec{F_2}$, вызываемой отражённым потоком. Таким образом:

$$d\vec{F} = d\vec{F_1} + d\vec{F_2}\ . \tag{8}$$

Так как для абсолютно гладкой плоской поверхности величина светового давления на расстоянии Δ от Солнца даётся формулой (7), то сила, действующая на площадку dS, будет иметь вид:

$$\overrightarrow{F_p} = 2P_0\left(\frac{a_0}{\Delta}\right)^2 dS\vec{k}\ , \tag{9}$$

где $\vec{k}$ - единичный вектор, имеющий направление «КА – Солнце».

Для расчета главного вектора и главного момента сил, требуется перевести силу $\overrightarrow{F_p}$ в систему координат объекта $Cxyz$. Для этого необходимо умножить вектор силы $\overrightarrow{F_p}$ на матрицу, обратную матрице описывающей пространственное положение тела (1). Вектор силы $\overrightarrow{F_p}$ в системе координат объекта выражается следующим образом:

$$\overrightarrow{F_p^{obj}} = A^{-1}\overrightarrow{F_p^{\text{т}}}\ , \tag{10}$$

где $\overrightarrow{F_p^T}$ - транспонированный вектор силы $\overrightarrow{F_p}$.

По разработанному нами алгоритму сила, действующая на площадку dS, будет иметь вид:

$$d\vec{F} = \overrightarrow{F_p^{obj}}\, dS(\overrightarrow{n_s}\cdot\overrightarrow{f_s})\ , \tag{11}$$

где

$\overrightarrow{f_s} = \left\{\frac{F_{px}^{obj}}{\left|F_p^{obj}\right|}, \frac{F_{py}^{obj}}{\left|F_p^{obj}\right|}, \frac{F_{pz}^{obj}}{\left|F_p^{obj}\right|}\right\}$ - единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором силы светового давления,

$n_s = \left\{\frac{n_{sx}}{|n_s|}, \frac{n_{sy}}{|n_s|}, \frac{n_{sz}}{|n_s|}\right\}$ - единичная нормаль к площадке dS.

Скалярное произведение $(\vec{n_s} \cdot \vec{f_s})$ даёт нам значение в интервале [-1,1], что позволяет выявить случай, когда поверхность освещается (возвращаемое значение <= 0), либо нет (возвращаемое значение > 0). Поэтому, когда на поверхность не падает свет, дальнейший расчет возмущений для этой поверхности не ведется.

Главный вектор сил $\vec{F}$ представляет собой сумму сил, действующих на конечное число площадок, из которых состоит модель КА:

$$\vec{F} = \sum_i d\vec{F}_i \,, \tag{12}$$

где $d\vec{F}_i$ определяется по формуле (11).

Момент $d\vec{M}$, создаваемый силой давления света для отдельной площадки, вычисляется как векторное произведение радиус-вектора центра масс площадки и вектора силы, действующей на эту площадку:

$$d\vec{M} = r_s \times d\vec{F} \,, \tag{13}$$

где

$d\vec{F}_i$ определяется по формуле (11).

Теперь расчет главного момента силы давления света $\vec{M}$ сводится к суммированию всех моментов $d\vec{M}$:

$$\vec{M} = \sum_i d\vec{M}_i \,. \tag{14}$$

Далее для расчета углового положения КА нужно вычислить угловое ускорение $\vec{\xi}$, сообщаемое моментом сил $\vec{M}$:

$$\vec{\xi} = \vec{M} / J \,, \tag{15}$$

где J - тензор инерции.

Пусть оси инерции совпадают с главными центральными осями инерции, тогда $J = \{J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}\}$. Если КА представить в виде совокупности элементарных частиц dm с радиус-вектором $d\vec{r_v}$, то моменты инерции можно вычислить по формулам:

$$J_{xx} = m\sum_i (dr_{vy}^2 + dr_{vx}^2),$$
$$J_{yy} = m\sum_i (dr_{vx}^2 + dr_{vz}^2), \quad (16)$$
$$J_{zz} = m\sum_i (dr_{xy}^2 + dr_{vy}^2),$$

где m - масса КА.

Угловая скорость КА будет иметь вид:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega} + \vec{\xi}dt, \quad (17)$$

где dt определяет промежуток времени действия силы.

На основе полученного вектора угловой скорости ω формируется матрица вращения *R*. Для этого в матрице (1) производится замена:

$$\alpha = \omega_x dt, \beta = \omega_y dt, \gamma = \omega_z dt. \quad (18)$$

Вращение тела достигается путем матричного умножения матрицы *A* (1) на матрицу *R*, т.е. новое угловое положения тела R' имеет вид:

$$R' = A \cdot R. \quad (19)$$

В результате в данной работе получены формулы главного вектора и главного момента силы давления света, что существенно корректирует уравнения динамики КА. Разработан алгоритм численной программы, которая позволяет произвести расчёт главного вектора и момента сил светового давления и вычислить угловое положение КА под воздействием светового давления при моделировании движения КА. Программная среда имеет возможность выбора поверхности реальной конструкции КА для вычисления и наблюдения воздействия сил светового давления на данную модель КА.

ЛИТЕТРАТУРА

1 Никулин Е.А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. – Санкт-Петербург: БХВ – Петербург, 2003. – 213 с.

2 Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука. Гл.ред. физ-мат. лит.,1965. – 189 с.

Файл: 4_Тулешов.doc
Каталог: X:\Полные журналы PDF\Вестник НИА РК\2009_№4
Шаблон: C:\Documents and Settings\Санду\Application Data\Microsoft\Шаблоны\Normal.dotm
Заголовок: Расчёт главного вектора и момента сил давления света при моделировании движения космического аппарата относительно центра масс
Содержание:
Автор: Admin
Ключевые слова:
Заметки:
Дата создания: 15.10.2009 14:20:00
Число сохранений: 4
Дата сохранения: 15.10.2009 14:46:00
Сохранил: Комп
Полное время правки: 7 мин.
Дата печати: 07.12.2012 16:21:00
При последней печати
страниц: 6
слов: 1 209 (прибл.)
знаков: 6 893 (прибл.)