

*А. К. ТУЛЕШОВ, А. СЕЙДИЛДАЕВА, Е. А. ТУЛЕШОВ*

**КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА ЧЕТВЕРТОГО  
КЛАССА МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ВХОДНОЙ ПАРЫ**

In the paper new method of the kinematical analysis of plane mechanisms of high classes was developed, for which it is impossible to apply method of the leading link replacement. The method is based on transition from the absolute angular coordinates of the links to the relative coordinates and vice versa, i.e. the mechanism of the first type is reduced to the mechanism of the second type and vice versa. Therefore the new method was named the method of the input pair replacement. As an example the two-basic mechanism of the fourth class is considered. The problems of positions and identification of assembling of the concrete mechanism were completely solved; formulae for the considered mechanism's speeds and accelerations were obtained.

Для кинематики механизмов высоких классов (МВК) важное значение имеет метод замены ведущего звена или нет [1]. Многие МВК на основе метода замены ведущего звена сводятся к механизмам второго класса. Тогда между координатами звеньев МВК получаются явные аналитические формулы. Это позволяет установить начальное положение механизма, необходимого для дальнейшего анализа положений механизма в заданной сборке приближенными методами [2].

Существует другие МВК, которые методом замены ведущего звена не сводятся к механизмам второго класса. В частности, примером таких механизмов является механизмы Ассура или широко известные двухопорные механизмы четвертого класса, которые используются в качестве грузоподъемных и манипуляционных устройствах [2, 3].

В настоящей статье предлагается аналитический метод кинематического анализа механизмов высоких классов методом замены входной пары, т.е. в данном случае механизм первого типа сводится к механизму второго типа, определение которых можно найти в работе [4]. Метод позволяет на основе аналитических вычислений определить начальное положение звеньев механизма высокого класса.

Изложим предлагаемый метод на примере двухопорного механизма четвертого класса с неравномерно распределенными поводками, которому нельзя применять метод замены ведущего звена. Предлагаемый аналитический метод основывается на переходе от абсолютных координат к относительным координатам.

На рис. 1 представлена кинематическая схема рассматриваемого двухопорного механизма четвертого класса.

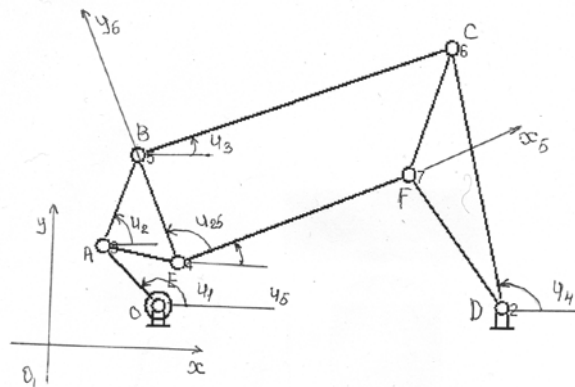


Рис. 1. Двухопорный механизм четвертого класса

В рассматриваемом механизме входная пара  $O$  образована входным звеном 1 и со стойкой. В дальнейшем в качестве входной пары примем пару  $E$ , которая образована подвижными звеньями 2 и 5. В качестве условной обобщенной координаты принимается относительная угловая координата между звеньями 2 и 5, т.е. угол  $\varphi_{25}$ . Положения звеньев рассматриваются относительно связанной со звеном 5 системы координат

$Ex_5y_5$ , ось  $Ex_5$  которой направлена вдоль поводка  $EF$ . Решение этой задачи получим в следующей последовательности.

Составляются уравнения кинематики для контура  $OABCD O$  со стойкой и контура  $EBCFE$  с подвижными звеньями:

$$\begin{aligned} f_1 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 + l_4 \cos \varphi_4 - l_0 = 0, \\ f_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 + l_4 \sin \varphi_4 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f_3 &= l_2'' \cos(\varphi_2 + \beta_2) + l_3 \cos \varphi_3 + l_4'' \cos(\varphi_4 + \beta_4) - l_5 \cos \varphi_5 = 0, \\ f_4 &= l_2'' \sin(\varphi_2 + \beta_2) + l_3 \sin \varphi_3 + l_4'' \sin(\varphi_4 + \beta_4) - l_5 \sin \varphi_5 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Умножая соответственно первое и второе уравнения (1) сначала на  $\cos \varphi_5$  и  $\sin \varphi_5$ , а затем, наоборот, на  $-\sin \varphi_5$  и  $\cos \varphi_5$ , потом складывая их, получаем первые два уравнения связи:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_5 \cdot f_1 + \sin \varphi_5 \cdot f_2 &= 0, \\ -\sin \varphi_5 \cdot f_1 + \cos \varphi_5 \cdot f_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Поступая аналогично с системой (2), имеем еще два уравнения:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_5 \cdot f_3 + \sin \varphi_5 \cdot f_4 &= 0, \\ -\sin \varphi_5 \cdot f_3 + \cos \varphi_5 \cdot f_4 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) получаем уравнения кинематики в относительных координатах в системе  $Ex_5y_5$ :

$$\begin{aligned} g_1 &= l_1 \cos \varphi_{15} + l_2 \cos \varphi_{25} + l_3 \cos \varphi_{35} + l_4 \cos \varphi_{45} - l_0 \cos \varphi_5 = 0, \\ g_2 &= l_1 \sin \varphi_{15} + l_2 \sin \varphi_{25} + l_3 \sin \varphi_{35} + l_4 \sin \varphi_{45} - l_0 \sin \varphi_5 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} g_3 &= l_2'' \cos(\varphi_{25} + \beta_2) + l_3 \cos \varphi_{35} + l_4'' \cos(\varphi_{45} + \beta_4) - l_5 = 0, \\ g_4 &= l_2'' \sin(\varphi_{25} + \beta_2) + l_3 \sin \varphi_{35} + l_4'' \sin(\varphi_{45} + \beta_4) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\varphi_{i5} = \varphi_i - \varphi_5$  – угловые положения звеньев относительно звена 5.

Структура уравнений (5) и (6) такова, что позволяет последовательно представить аналитические решения исходной системы (1) и (2). С учетом того, что обобщенной координатой является  $\varphi_{25}$ , решение уравнений (6) относительно  $\varphi_{35}$  и  $\varphi_{45}$  имеет вид:

$$\varphi_{35}^{(1,2)} = \pm \arccos \frac{l_3^2 + l_2''^2 - l_4''^2}{2l_2''l_3} + \varphi_{25} + \beta_2 + \gamma_3, \quad (7)$$

$$\varphi_{45}^{(1,2)} = \pm \arccos \frac{l_4'^2 + l_C^2 - l_3^2}{2l_C l_4'} - \beta_4 + \varphi_{25} + \beta_2 + \gamma_3, \quad (8)$$

где

$$l_C = \sqrt{(l_2'' \cos(\varphi_{25} + \beta_2) - l_5)^2 + l_2^2 \sin^2(\varphi_{25} + \beta_2)},$$

$$\gamma_3 = \arctg \frac{l_2 \sin(\varphi_{25} + \beta_2)}{l_2'' \cos(\varphi_{25} + \beta_2) - l_5}.$$

Аналогично записываем решения уравнений (5) относительно  $\varphi_{15}$  и  $\varphi_5$ :

$$\varphi_{15}^{(1,2)} = \gamma_1 + \mu_1^{(1,2)}, \quad (9)$$

и

$$\varphi_5^{(1,2)} = \gamma_1 + \mu_5^{(1,2)}, \quad (10)$$

где

$$\mu_1^{(1,2)} = \pm \arccos \frac{l_1^2 + l_{AC}^2 - l_0^2}{2l_1 l_s},$$

$$\mu_5^{(1,2)} = \pm \arccos \frac{l_0^2 + l_{AC}^2 - l_1^2}{2l_0 l_s},$$

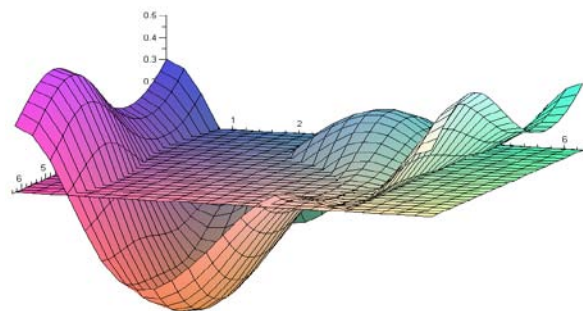
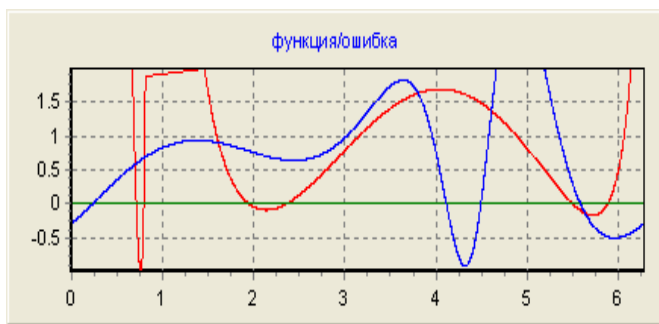
$$l_s = \sqrt{(l_2 \cos \varphi_{25} + l_3 \cos \varphi_{35} + l_4 \cos \varphi_{45})^2 + (l_2 \sin \varphi_{25} + l_3 \sin \varphi_{35} + l_4 \sin \varphi_{45})^2},$$

$$\gamma_1 = \arctg \frac{l_2 \sin \varphi_{25} + l_3 \sin \varphi_{35} + l_4 \sin \varphi_{45}}{l_2 \cos \varphi_{25} + l_3 \cos \varphi_{35} + l_4 \cos \varphi_{45}}.$$

После того как определен угол  $\varphi_5$ , соответствующий определенному решению уравнений связи (1) и (2), находим значения абсолютных угловых координат звеньев:

$$\varphi_i = \varphi_{i5} + \varphi_5, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (11)$$

Таким образом, с помощью последовательности явных формул можно найти комбинацию координат  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  механизма, которые точно определяют положения звеньев.



*a*

*б*

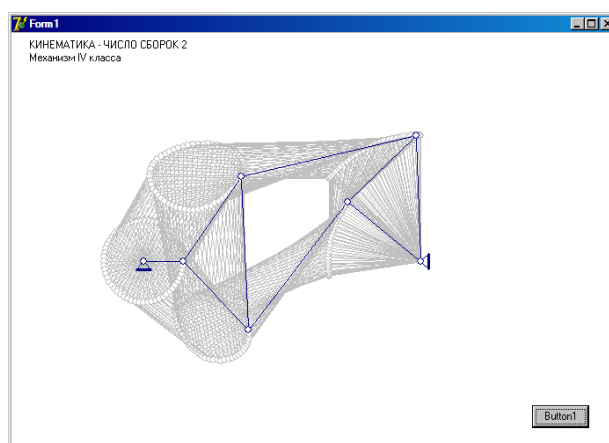
*Рис. 2.* Определение числа сборок механизма на основе графиков функции положения звеньев

На основе аналитических решений задачи о положениях составлены алгоритм и программа численного анализа кинематики механизма. Результаты моделирования представлены на рис. 2, 3.

На рис. 2 приведены графики функции положения и идентификация сборок механизма в двухмерной и трехмерной иллюстрации. Как видно из графиков, при  $\varphi_{21} = 0$  имеем 6 пересечений оси OX, т.е. 6 сборок, а при  $\varphi_{21} = \pi$  имеем 4 сборки.

Исходные данные

l1=	15	l2=	38	l2'=	35
l3=	68	l4=	46	l4'=	35
l5=	60	$\alpha =$	105	$\beta =$	70
l0x=	70	l0y=	0		



*a*

*б*

*Рис. 3.* Входные данные и кривошипные сборки механизма

На рис. 3 представлены две кривошипные сборки и значения кинематических параметров механизма. Следует отметить, что наличие аналитических формул позволяет решать сложную задачу анализа положений механизмов высоких классов точно и с меньшими тратами времени на вычислительные процессы.

Проведем анализ скоростей и ускорений звеньев рассматриваемого механизма на основе метода замены входной пары. Уравнения кинематики механизма в относительных координатах звеньев представлены в форме (5) и (6).

На основании уравнения (11) угловые скорости звеньев будут равны

$$\dot{\varphi}_i = \dot{\varphi}_{i5} + \dot{\varphi}_5, (i=1,2,3,4). \quad (12)$$

Чтобы определить зависимость этих угловых скоростей от обобщенной скорости  $\dot{\varphi}_{25}$  вычислим производную по времени из системы (5) и (6):

$$\begin{aligned} -l_1\dot{\varphi}_{15} \sin \varphi_{15} + l_0\dot{\varphi}_5 \sin \varphi_5 &= l_3\dot{\varphi}_{35} \sin \varphi_{35} + l_4\dot{\varphi}_{45} \sin \varphi_{45} + l_2\dot{\varphi}_{25} \sin \varphi_{25}, \\ l_1\dot{\varphi}_{15} \cos \varphi_{15} - l_0\dot{\varphi}_5 \cos \varphi_5 &= -l_3\dot{\varphi}_{35} \cos \varphi_{35} - l_4\dot{\varphi}_{45} \cos \varphi_{45} - l_2\dot{\varphi}_{25} \cos \varphi_{25}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} -l_3\dot{\varphi}_{35} \sin \varphi_{35} - l_4''\dot{\varphi}_{45} \sin(\varphi_{45} - \beta_4) &= l_2''\dot{\varphi}_{25} \sin(\varphi_{25} + \beta_2), \\ l_3\dot{\varphi}_{35} \cos \varphi_{35} + l_4''\dot{\varphi}_{45} \cos(\varphi_{45} - \beta_4) &= -l_2''\dot{\varphi}_{25} \cos(\varphi_{25} + \beta_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Сначала решается система (14) относительно  $\dot{\varphi}_{35}$  и  $\dot{\varphi}_{45}$ , и эти решения имеют вид

$$\dot{\varphi}_{35} = \Pi_{35}\dot{\varphi}_{25} \quad \text{и} \quad \dot{\varphi}_{45} = \Pi_{45}\dot{\varphi}_{25}, \quad (15)$$

где аналоги угловых скоростей равны

$$\Pi_{35} = \frac{l_2''l_4'' \sin(\varphi_{25} + \beta_2 - \varphi_{45} + \beta_4)}{l_3l_4'' \sin(\varphi_{45} - \beta_4 - \varphi_{35})}, \quad (16)$$

$$\Pi_{45} = \frac{l_2''l_3 \sin(\varphi_{35} - \varphi_{25} - \beta_2)}{l_3l_4'' \sin(\varphi_{45} - \beta_4 - \varphi_{35})} \quad (17)$$

при условии

$$\sin(\varphi_{45} + \beta_4 - \varphi_{35}) \neq 0. \quad (18)$$

Далее решаем уравнения (13) относительно  $\dot{\varphi}_{15}$  и  $\dot{\varphi}_5$ , и эти решения имеют вид

$$\dot{\varphi}_{15} = \Pi_{15} \dot{\varphi}_{25} \quad \text{и} \quad \varphi_5 = \Pi_5 \dot{\varphi}_{25}, \quad (19)$$

где аналоги угловых скоростей равны

$$\Pi_{15} = -\frac{l_3 l_0 \Pi_{35} \sin(\varphi_{35} - \varphi_5) + l_4 l_0 \Pi_{45} \sin(\varphi_{45} - \varphi_5) + l_2 l_0 \sin(\varphi_{25} - \varphi_5)}{l_1 l_0 \sin(\varphi_{15} - \varphi_5)}, \quad (20)$$

$$\Pi_5 = -\frac{l_3 l_0 \Pi_{35} \sin(\varphi_{15} - \varphi_{35}) + l_4 l_0 \Pi_{45} \sin(\varphi_{15} - \varphi_{45}) + l_2 l_0 \sin(\varphi_{15} - \varphi_{25})}{l_1 l_0 \sin(\varphi_{15} - \varphi_5)} \quad (21)$$

при условии

$$\sin(\varphi_{15} - \varphi_5) \neq 0. \quad (22)$$

Абсолютные угловые скорости звеньев из уравнений (12) будут равны

$$\dot{\varphi}_i = (\Pi_{i5} + \Pi_5) \dot{\varphi}_{25}, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (23)$$

Если истинной обобщенной координатой механизма будет координата  $\varphi_1$  и была задана угловая скорость  $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$ , то из уравнения (23) без труда можно определить

$$\dot{\varphi}_{25} = \dot{\varphi}_1 / (\Pi_{15} + \Pi_5). \quad (24)$$

Для остальных угловых скоростей звеньев  $\dot{\varphi}_i, i = 2, 3, 4, 5$  используется формула (23).

Более того, можно получить выражения аналогов угловых скоростей механизма при истинной обобщенной координате  $\varphi_1$ , поставив уравнение (24) в уравнения (23), т.е.

$$\dot{\varphi}_i = \Pi_{i1}(\varphi_1) = \frac{(\Pi_{i5} + \Pi_5)}{\Pi_{15} + \Pi_5} \dot{\varphi}_1, \quad i = 2, 3, 4, 5. \quad (25)$$

Аналоги угловых ускорений на основе систем (13) и (14) вычисляются в таком же порядке, что и аналоги угловых скоростей.

В результате разработан новый метод кинематического анализа механизмов высоких классов, названный методом замены входной пары. В качестве примера рассмотрен двухопорный механизм четвертого класса.

Полностью решена задача о положениях и идентификации сборок конкретного механизма, получены формулы для скоростей и ускорений рассматриваемого механизма.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И. И.* Структура, кинематика и кинетостатика многозвенных плоских механизмов. М.; Л., 1939. 232 с.
2. *Джолдасбеков У. А., Молдабеков М. М.* Основы аналитической теории манипуляционных устройств высоких классов. Алма-Ата: КазГУ, 1989. 82 с.
3. *Джолдасбеков У. А.* Теория механизмов высоких классов. Алматы: Ылым, 2001. 428 с.
4. *Вульфсон И. И., Ерихов М. Л., Коловский М. З., Пейсах Э. Е.* и др. Механика машин. М.: Высш. шк., 1996. 511 с.