УДК 519. 245

Г. Т. МУСАТАЕВА

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ДАВЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ И МЕТОДАМИ МОНТЕ–КАРЛО

The article is devoted to numerical research of the equations of a filtration of two not mixing up incompressible liquids in porous environment. For the description isothermal non-stationary filtrations of currents of a homogeneous a drop compressed liquid in isotropy poorly deformational to porous environment the various models of a filtration are used. One of such models is the model Musket – Leverett.

In article the Dirihlet and Neumann problem for some equation for filtrations of Musket – Leverett model a bi phase fluid concerning pressure is considered. Is solved by algorithms "random walk on spheres " and " random walk on lattices " of methods Monte Carlo and by probability-difference methods.

Теория фильтрации – исследование движения жидкостей в пористой среде – имеет важное прикладное значение; она является тем фундаментом, на основе которого создаются и осуществляются на практике мероприятия по разработке подземных ресурсов нефти и газа.

Для описания изотермических нестационарных фильтрационных течений однородной капельно-сжимаемой жидкости в изотропной слабодеформируемой пористой среде используются различные модели фильтрации.

Работа посвящена исследованию уравнений фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пористой среде. Возникновение этой гидродинамической модели и интерес к ней были вызваны появлением метода вытеснения нефти путем закачки в нефтеносный пласт воды или специальных растворов.

Определение давления в отдельно взятой точке нефтеносного пласта позволяет эффективно использовать технические ресурсы в определении координат места бурения скважин.

В данной работе рассматриваются задачи Дирихле и Неймана для одного уравнения фильтрации в модели Маскета-Леверетта двухфазной жидкости относительно давления.

Приведем условия независимости суммарной скорости фильтрации от насыщенности. Если коэффициенты $K = K_0(x)k(s)$ и правая часть $\vec{f}(x,s)$ не зависят от s, то система уравнений относительно насыщенности и давления распадается и допускает последовательное определение поля скорости $\vec{V}$ и фазовых насыщенностей $s_i(x,t)$. Эти условия в терминах функциональных параметров модели Маскета–Леверетта формулируются следующим образом:

1) $k = k_{01}(s) + k_{02}(s) = const$.

2) $\dfrac{1}{\vec{m}(x)} \det K_0(x) = const$.

3) не учитываются силы тяжести или жидкости имеют одинаковые плотности $\rho_1 = \rho_2$.

При выполнении этих условий система для определения насыщенности и давления распадается на два отдельных уравнения.

Рассмотрим задачу определения суммарной скорости фильтрации неоднородной жидкости $\vec{V} = -\left(K\nabla p + \vec{f}\right)$. Эта задача, в свою очередь, связана с краевой задачей для линейного эллиптического уравнения относительно давления.

Постановка задачи. Следуя [1] -[3], в ограниченной области $\Omega \in \mathbf{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, рассматривается задача фильтрации двухфазной жидкости относительно давления

$$\operatorname{div}\left(K\nabla p(x,t) + \vec{f}(x,t)\right) = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$p(x,t) = p_0(x,t), \quad (x,t) \in S_2, \tag{2}$$

$$\left(K\nabla p(x,t) + \vec{f}(x,t)\right) \cdot \vec{n} = W(x,t), \quad (x,t) \in S_1, \tag{3}$$

где $Q = \Omega \times [0,T]$, $S_i = \partial\Omega_i \times [0,T]$, $i = 1,2$, $K = K_1 + K_2$,

$$K_i = K_0 k_{0i}(x),\ i = 1,2,\ \vec{f} = K\int_s^1 \nabla \frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{k_{02}}{k}\, d\xi + K_2\nabla p_c + K_2\left(\rho_2 - \rho_1\right)\vec{g},$$

где K_0 – коэффициент фильтрации пористой среды для однородной жидкости (или симметричный тензор для анизотропной среды), S_1 соответствует эксплуатационной границе,

S_2 соответствует границе неподвижной жидкости, $W(x,t)-$расход смеси (дебиты скважин), K_i-симметричный тензор фазовой проницаемости, $k_{0i}=\dfrac{1}{\mu_i}\overline{k}_{0i}(s)-$фазовые проницаемости для однородного изотропного грунта, μ_i-коэффициент динамической вязкости, $\overline{k}_{0i}-$относительные фазовые проницаемости, $k_{0i}(s)>0,\ \ s\in\left(0,1\right),\ \ k_{01}(0)=k_{02}(1)=0,$ $\rho_i\ \left(i=1,2\right)-$плотности жидкости, $\vec{f}(x,t)-$заданная функция, p_c-капиллярное давление, $\vec{g}-$вектор ускорения свободного падения.

Если известен градиент давления ∇p, то скорость фильтрации определяется из формулы

$$-\vec{V}(x,t)=K\nabla p(x,t)+\vec{f}(x,t),\quad (x,t)\in Q. \tag{4}$$

Решение задачи (1) – (3). Делим $t\in\left[0,T\right]$ на n равных частей с шагом $\tau=\dfrac{T}{n},\quad t_j=\tau j,\quad j=0,...,n.$ Рассмотрим случай $K=\overline{K}=\text{const}.$ Тогда из (1) получим для временных слоев j уравнение

$$\Delta p^j(x)=-\frac{\operatorname{div}\vec{f}^{\,j}(x)}{\overline{K}}\equiv f_1^j(x),\quad j=0,1,2...,n,\quad x\in\Omega\ . \tag{5}$$

Присоединим граничные условия

$$p^j(x)=p_0^j(x),\quad x\in S_2^j=\partial\Omega_2^j,\quad j=0,1,...,n, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial p^j(x)}{\partial x_i}\cdot n_i^j=W_1^j,\quad x\in S_1^j=\partial\Omega_1^j,\quad j=0,1,..,n, \tag{7}$$

где n_i^j-координаты внешней нормали $\vec{n}=\vec{n}(x,t)$, $W_1^j=\left(W^j-\sum\limits_{i=1}^{3}f_i^j\cdot n_i^j\right)/\,\overline{K}$.

Алгоритм «блуждания по сферам». Границу S_2^j назовем поглощающей, а границу S_1^j – отражающей. Рассмотрим задачу для временных слоев $j=0,1,...,n$

$$\Delta p(x) = f_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

$$p(x) = p_0(x), \quad x \in S_2 = \partial\Omega_2, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial p(x)}{\partial x_i} \cdot n_i = W_1(x), \quad x \in S_1 = \partial\Omega_1. \tag{10}$$

Граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из объединения двух границ $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, где $\partial\Omega_1$ соответствует условию типа Неймана (10), и, она является отражающей границей, а граница $\partial\Omega_2$ соответствует условию типа Дирихле (9), и, она является поглощающей границей. Решаем задачу (8), (9) и (10) с помощью алгоритма «блуждания по сферам» методов Монте–Карло. При моделировании траекторий с помощью алгоритма «блуждания по сферам», «частица», при достижении $\varepsilon-$границы $\partial\Omega^{\varepsilon}$, поглощается, если $\varepsilon-$граничная точка принадлежит граничной области $\partial\Omega_2^{\varepsilon}$, и, отражается, если $\varepsilon-$граничная точка принадлежит граничной области $\partial\Omega_1^{\varepsilon}$. При поглощении учитывается «вес» поглощающей границы пропорциональный величине $p_0(x_\varepsilon)$, где $x_\varepsilon \in \partial\Omega_2^{\varepsilon}$, а при отражении – «вес» отражающей границы пропорциональный величине $W_1(x_\varepsilon)$, где $x_\varepsilon \in \partial\Omega_1^{\varepsilon}$. При отражении «частица» возвращается в предыдущий внутренний узел. Во всех внутренних узлах вычисляются «веса» по формуле, [3], т.е. $q_i = 1, \ \ i = 1, 2, \ldots$. Подобные задачи рассматривались в работах [4], [5].

Алгоритм «блуждания по решеткам». После дискретизации по x задачи (8), (9) и (10) на временных слоях $j = 0, 1, \ldots, n$ получим разностную задачу

$$p_{klm} = \frac{1}{6}\left(p_{k-1lm} + p_{k+1lm} + p_{kl-1m} + p_{kl+1m} + p_{klm-1} + p_{klm+1}\right) + h^2 f_{1klm}, \tag{11}$$

$$k = 1, 2, \ldots, N_1 - 1, \quad l = 1, 2, \ldots, N_2 - 1, \quad m = 1, 2, \ldots, N_3 - 1.$$

Граничные условия (9) и (10) на временных слоях записываются в виде:

$$p_{klm} = p_{0klm} \tag{12}$$

на границе γ_2^h,

$$\frac{p_{k+1lm}-p_{k-1lm}}{2h}\cdot n_1+\frac{p_{kl+1m}-p_{kl-1m}}{2h}\cdot n_2+\frac{p_{klm+1}-p_{klm-1}}{2h}\cdot n_3=R_{1klm} \qquad (13)$$

на границе γ_1^h.

Разностная задача (11), (12) и (13) решается с помощью алгоритма «блуждания по решеткам» методов Монте–Карло. Действительно, вероятность перехода из узла $(k,\ l,\ m)$ в любой из соседних узлов $(k-1,\ l,\ m)$, $(k+1,\ l,\ m)$, $(k,\ l-1,\ m)$, $(k,\ l+1,\ m)$, $(k,\ l,\ m-1)$, $(k,\ l,\ m+1)$ равна $1/6$. На дискретной границе γ_2^h «частица» поглощается, а на дискретной границе γ_1^h – отражается. При отражении и поглощении учитываются «веса» граничных узлов. При переходе из внутреннего узла во внутренний узел учитываются переходные «веса». В обоих алгоритмах можно оценить вероятностную оценку решения. В работе [6] впервые применялся алгоритм «блуждания по решеткам» для решения линеаризованных возмущенных разностных уравнений Навье–Стокса, а в работе [7] получена оценка дисперсии решения линеаризованных возмущенных разностных уравнений Навье–Стокса, вероятностно-разностный метод рассматривается в работах [8], [9].

Вероятностно-разностный метод. Рассмотрим задачу (11)-(13). Пусть $\left\{\xi_q^h\right\}$ $q=0,1,\ldots$, значение переходной цепи из узла $(k,\ l,\ m)$ в любой из соседних узлов $(k-1,\ l,\ m)$, $(k+1,\ l,\ m)$, $(k,\ l-1,\ m)$, $(k,\ l+1,\ m)$, $(k,\ l,\ m-1)$, $(k,\ l,\ m+1)$. Пусть $p_0(x)$ и $W_1(x)$ заданные непрерывные функции для $x\in\gamma_2^h$ и $x\in\gamma_1^h$.

Пусть N_h - момент первого выхода цепи из дискретной области ω^h, ω^h- аппроксимация области Ω. $N_h=\min\left\{q:\xi_q^h\notin\omega^h\right\}$. Тогда уравнение (11) можно записать в следующем виде

$$p(x)=\mathrm{E}_x\left\{p\left(\xi_1^h\right)+\frac{1}{6}\Delta t^h f_1(x)\right\},\qquad x\in\omega_h \qquad (14)$$

с условием (12).

Если $\mathrm{E}_x\ \ N_h<\infty$, то (14) и (12) имеет единственное решение

$$p^h(x) = \mathrm{E}_x \left\{ \sum_{q=0}^{N_h-1} f_1\left(\xi_q^h\right)\Delta t_q^h + p_0\left(\xi_{N_h}^h\right) \right\}. \qquad (15)$$

Здесь $\Delta t_q^h = \Delta t^h\left(\xi_q^h\right)$ – параметр процесса.

Множество γ_i^h $(i=1,\ 2)$ аппроксимирует $\partial\Omega$ «изнутри», то есть, либо $x \in \bar{\Omega} \bigcap \mathbf{R}_h^3$, либо $x \in \partial\Omega$, точек решетки $x_q \pm e_q h$, $x_q \pm e_q h \pm e_r h$, касается с $\partial\Omega$, здесь e_q и e_r – единичные векторы координатных осей. Тогда переходные вероятности аппроксимирующей цепи $\left\{\xi_q^h\right\}$ в Ω в соседние узлы равны $1/6$. Цепь обрывается при достижении поглощающей границы γ_2^h с вероятностью 1.

Можно заметить, что

$$\mathrm{E}_x\left\{\xi_{n+1}^h - \xi_n^h \middle| \xi_n^h = y_q \in \gamma_1^h\right\} = v(y)h/|v(y)|.$$

Последнее согласуется с тем, что отражение от точки γ_1^h происходит в направлении $v(y)$, где $v(y)$ – направление попадания во внутренний узел.

Определим

$$A_n^h = \prod_{q=0}^{n} \exp\left(\Delta t_q^h I_{\omega_h}\left(\xi_q^h\right)\right).$$

Тогда для случайной длины цепи N_h получаем, для дискретной границы γ_1^h единственное дискретное приближение решения задачи (11), (13), то есть

$$p_h(x) = \mathrm{E}_x\left\{ \sum_{q=0}^{N_h-1} A_q^h \cdot f_1\left(\xi_q^h\right)\Delta t_q^h \cdot I_{\omega_h}\left(\xi_q^h\right) + \sum_{q=0}^{N_h-1} A_q^h \cdot W_1\left(\xi_q^h\right) d\phi_q^h \right\}, \qquad (16)$$

здесь $d\phi^h = h/|v(x)|$, $d\phi_q^h = d\phi^h\left(\xi_q^h\right) I_{\gamma_1^h}\left(\xi_q^h\right)$.

Теперь объединяя (15) и (16) получаем единственное дискретное приближение решения задачи (11) – (13), то есть

$$p^h(x) = \mathrm{E}_x \left\{ \sum_{q=0}^{N_h-1} f_1\left(\xi_q^h\right)\Delta t_q^h + p_0\left(\xi_{N_h}^h\right) \right\}$$

$$+\mathrm{E}_x\left\{\sum_{q=0}^{N_h-1} A_q^h \cdot f_1\left(\xi_q^h\right)\Delta t_q^h \cdot I_{\omega_h}\left(\xi_q^h\right)+\right.$$

$$\left.\sum_{q=0}^{N_h-1} A_q^h \cdot W_1\left(\xi_q^h\right) d\phi_q^h\right\} \tag{17}$$

Полученная оценка давления в одной точке (17) позволяет эффективно проводить мероприятия по добыче углеводородов в пористой среде, где фильтрационные процессы протекают по модели Маскета-Леверетта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. С. 252-256.

2. *Monakhov V. N., Zhumagulov B. T.* The Fluid Dynamics of Oil Production. Milan, 2003. 305 p.

3. *Елепов Б. С., Кронберг А. А., Михайлов Г. А., Сабельфельд К.К.* Решение краевых задач методами Монте-Карло. Новосибирск: Наука, 1980. С. 47.

4. *Shakenov K.* Solution of one problem of linear relaxational filtration by Monte Carlo methods. International Conference on COMPUTATIONAL MATHEMATICS (ICCM 2002). PART ONE. (The International Conference on Computational Mathematics. Proceedings: Part I). Novosibirsk 2002. P. 276-280.

5. *Шакенов К. К.* Решение задачи Неймана для уравнения Гельмгольца методами Монте - Карло. Международная конференция по Вычислительной Математике, МКВМ-2004, Часть 1, Новосибирск, 2004. С. 333-334.

6. *Ермаков С. М., Шакенов К. К.* О применении метода Монте-Карло к уравнениям Навье-Стокса..// Вестник ЛГУ. 14с. Депонирована в ВИНИТИ No 6267-В86 от 26 июня 1986.

7. *Шакенов К. К.* Дисперсия оценки решения системы линеаризованных возмущенных разностных уравнений Навье - Стокса. //Вычислительные технологии. 2002. Том 7, № 3,

Новосибирск, 2002. С. 93 - 97.
8. *Кушнер Г. Дж.* Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. М.: Наука, 1985, 222 с.
9. *Шакенов К. К., Исабекова Н. А.* Решение задач для модели релаксационной фильтрации, протекающей по линейному закону Дарси методами Монте–Карло и вероятностно–разностными методами. //Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. № 1 (52), 2007. С. 81 – 95.

Файл: 3_Мусатаева.doc
Каталог: X:\Полные журналы PDF\Вестник НИА РК\2008_№4
Шаблон: C:\Documents and Settings\Санду\Application Data\Microsoft\Шаблоны\Normal.dotm
Заголовок: О решении одной задачи фильтрации двухфазной жидкости относительно давления
Содержание:
Автор: KVM223
Ключевые слова:
Заметки:
Дата создания: 24.11.2008 15:57:00
Число сохранений: 2
Дата сохранения: 24.11.2008 15:57:00
Сохранил: а
Полное время правки: 0 мин.
Дата печати: 07.12.2012 10:14:00
При последней печати
страниц: 8
слов: 1 898 (прибл.)
знаков: 10 820 (прибл.)