УДК 681.511 *МРНТИ 50.03.03, 28.15.23*

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Ху Вен-Цен, к.т.н.

Южно-Казахстане кий государственный университет им. М. Ауезова

Курдел1 технологиялыц жуйелерд1 оцтайлы баскарудыц орталыцсыздандырылган жуйелерЫ куру мэселелерЬ жеке алганда баскару есептерше декомпозициялау эд1стерМц колданылымдыгы карастырылган.
Туйшд1 сездер: баскару, технологиялык жуйелер, декомпозициялау sflicrepi.

The questions of construction of decentralized systems of optimum control of complex technological systems, in particular, applicability to problems of control of decomposition methods are considered. The separability feature of the problems specified is formalized and substantiated. The generalized procedure of their decomposition is developed.
Key words: control, technological systems, methods of decomposition.

Эффективный подход к решению задач оптимального управления объектами класса сложных технологических систем (СТС) заключается в применении методов декомпозиции, реализуемых в децентрализованных системах управления с иерархической структурой. К данному классу отнесены объекты масштаба завершенных производств, группы производств и производственных объединений. Их отличительной особенностью является то, что применение в них обычных методов автоматического управления часто оказывается неэффективным, либо труднореализуемым. В качестве альтернативного направления в настоящее время активно развиваются методы декомпозиции, реализуемые в децентрализованных системах управления с иерархической структурной организацией. Идеи децентрализованного управления достаточно распространены. Однако полной теоретической проработки в части формальных обоснований еще не получено. Это касается, в частности, требований, которым должна удовлетворять задача управления СТС, для того чтобы к ее решению можно было применить декомпозиционный подход. В основе методов декомпозиции лежит сведение задачи управления СТС к совокупности локальных задач управления подсистемами, выделяемыми в составе СТС, и глобальной задаче координации [1].

В работе описаны возможности, связанные с обоснованием условий применимости и реализацией подобных методов. Рассмотрим обобщенную задачу оптимального управления СТС, которую сформулируем в виде задачи математического программирования

$$F(x) \to \max_{x \in X}$$

$$X = \{x : g(x) = 0; h(x) \geq 0\}, \quad (1)$$

где x - вектор независимых переменных размерности

X - множество в R^n,

$F(x)$ - скалярная функция;

$g(x)$ - векторнозначная функция размерности m;

$h(x)$ - векторнозначная размерности t.

Функции $F(x)$, $g(x)$, $h(x)$ - являются непрерывными.

Введем в рассмотрение р-мерный вектор параметров s, множество $S \subset R^p$, скалярную функцию $f(x,s)$, m-мерную функцию $g(x,s)$ и f-мерную функцию $h(x,s)$, определенные на декартовом произведении $X \times S$.

Сформулируем далее задачу вида:

$$f(x,s) \to \max_{x,s \in M}$$

$$M = \{x,s : g(x,s) = 0; h(x,s) \geq 0\} \quad (2)$$

$$M = X \times S.$$

Предположим, что данная задача обладает таким свойством, что если пара x^*, s^* - есть решение задачи (2), то x^* - решение задачи (1), причем $f(x^*, s^*) = F(x^*)$.

В этом случае для решения задачи (2) можно применить двухуровневую схему, с приведением к эквивалентной задаче координации:

$$\Phi(s) \to \max$$

и локальной задаче:

$$f(x,s^{£})\longrightarrow \max_{x}$$

$$g(x?s) = O \qquad И)$$

$$h(xfs) > O$$

$$x,s^{€} eXxS \quad »$$

где $£^{f}$ - некоторое подмножество 5;

- значение переменной *s,* учитываемое в локальной задаче как заданная константа;

~ оптимальное значение целевой функции локальной задачи, обусловленное текущим значением s в задаче координации.

Рассмотренную двухуровневую схему можно охарактеризовать как параметрическую декомпозицию. При этом переменную x - считать локальной, а переменную *s* - глобальной, или параметром координации.

Если в задаче (2) переменные *x и s,* а также условия, учитываемые в ограничениях, имеют блочную структуру, локальная задача (4) может быть разделена на несколько автономных подзадач меньшей размерности, согласуемых решением глобальной задачи координации.

Определим теперь, при каких условиях может быть реализована приведенная выше двухуровневая схема решения задачи (1), сведенной к задачам (3) ~(4).

Предположим, что существует однозначное непрерывное отображение *1(x)* некоторого множества *X ^Xна* множество *S.* Обозначим через *X (s)* - множество допустимых решений локальной задачи (4).

$$X (s) czX=\{x:xs X; \; g(_{x}f_{s} j = 0; \quad h(_{x}^{€}{}_{s}) > 0 \} \; . \qquad (5)$$

Предположим далее, что выполняются следующие условия:

1 • $f(x,l(x)) = f(xJ,Vx_{e}X$

2. ЛГ $(s)*0,$ Vs e *S* и, если x e *X (s),* то $f(x,s) <f(x)\backslash$

3. Если x, e X,l(x_{x}) = s, , то существует *xeX(s)* такое, что $f(x,s_{x})>f(x,).$

Приведенные условия заключаются в следующем:

1. На множестве X существует подмножество X, элементы которого однозначно пересчитываются в значение параметра координации *s.* При этом для любого значения *x* & *X* значение целевой функции модифицированной задачи (2) совпадает со значением целевой функции исходной задачи (1). Такое совпадение возможно в том случае, когда параметр координации 5 связан с независимой переменной х взаимнооднозначной функциональной зависимостью. Как, например, выходная переменная объекта управления, или какого-либо его элемента, связанная с входной переменной в уравнении математической модели. В этом случае целевая функция задачи управления может учитывать данную переменную в явном виде, либо через зависимость от х. Вычисленные значения целевой функции по любому из этих выражений будут одинаковыми.

2. Для любого значения координирующей переменной s на своем множестве *S* множество допустимых решений локальной задачи (4) не пусто, т. е. локальная задача имеет решение. При этом для допустимых значений переменной х все возможные значения целевой функции модифицированной задачи (2) не превышают значения целевой функции исходной задачи (1).

3. Для любого значения координирующей переменной s_t, удовлетворяющего математической модели и учитываемой в задаче (3), существует допустимое значение x, которое доставляет целевой функции модифицированной задачи (2) значение не хуже, чем значение целевой функции исходной задачи (1).

Вместе взятые эти условия означают, что целевая функция модифицированной задачи (2) на допустимых значениях своих переменных может приближаться как угодно близко к целевой функции исходной задачи. Причем такое приближение будет обусловлено увеличением значений обеих целевых функций. А в точке оптимума обе целевые функции совпадут.

Отсюда можно утверждать:

Теорема. Если s* - решение задачи координации (3), то *x", (s')* - есть решение исходной задачи (1). Если x* - решение исходной задачи (1), то *!(x")* - решение задачи координации (3), причем *f(x')* = = *?(*)*•

Таким образом, решение исходной задачи (1) может быть получено в результате совместного решения задачи координации (3) и локальной задачи (4). Достижение искомого оптимума предполагает поочередное изменение переменных в данных задачах. При этом обе задачи решаются с использованием итерационных процедур последовательного улучшения текущих решений, т. е. поисковых процедур оптимизации.

Описанным свойствам, очевидно, удовлетворяют задачи, которые естественным образом распадаются на отдельные подзадачи или приводимые эквивалентно к подобным задачам. Такие задачи принято называть сепарабельными [2]. Свойством сепарабельности обладают, в частности, задачи с аддитивной целевой функцией и блочной структурой переменных, уравнений математической модели и ограничений. К примеру, задачи линейного программирования с блочно-диагональной структурой матрицы коэффициентов при переменных в ограничениях. Для нелинейных задач сепарабельность в каждом конкретном случае устанавливается и, при наличии возможности, обеспечивается индивидуально, что требует проведения определенных исследований.

Задача управления СТС, удовлетворяющая свойству сепарабельности, может быть получена путем преобразования задачи (1) на основе разбиения СТС на совокупность взаимосвязанных подсистем, каждая из которых характеризуется собственной целевой функцией, математической моделью и ограничениями на допустимые режимы функционирования. Такая задача, которая в общем случае является нелинейной, может быть сформулирована в виде [3]:

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(x_i, u_i) \to \max_{x,u}$$

$$g_i(x_i, u_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

$$h_i(x_i, u_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N \qquad (6)$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

где N - число подсистем, выделенных в составе СТС;

f_i, $i=1,2,\ldots,N$ - локальные целевые функции подсистем;

x_i, u_i, y_i - векторы входов, управлений и выходов i-х подсистем соответственно;

g_i - математическая модель i-й подсистемы в виде векторнозначной функции;

h_i - векторнозначная функция в ограничениях на переменные состояния i-й подсистемы;

C_{ij} - матрицы связи компонентов векторов x_i с компонентами векторов y_j.

Матрица связи $c_{;j}$имеет размерность *тхп,* где *тип* - размерности векторов *х.* и *у* соответственно. Компоненты данной матрицы имеют значение 1 - при наличии связи и значение 0 - при отсутствии связи.

Согласно приведенным выше положениям декомпозиция сепарабельной задачи управления СТС означает разделение множества ее переменных на отдельные подмножества. Такое разделение в общем случае реализуется в два этапа.

На первом этапе множество переменных исходной задачи подразделяется на два подмножества - множество переменных локальных задач управления и множество переменных координации. При этом предполагается, что переменные этих подмножеств изменяются поочередно - вначале на множестве переменных координации, затем на множестве переменных локальных задач. Указанные изменения являются взаимообусловленными, т. е. изменение переменных координации влечет изменение переменных локальных задач и соответственно обратно.

На втором этапе осуществляется разделение множества локальных переменных на подмножества для отдельных локальных задач. Обычно это означает представление исходного множества в виде декартового произведения отдельных подмножеств для переменных локальных задач.

Обозначим множество переменных задачи управления СТК (6) через *М,* полагая, что оно представляет объединение множеств *X, U, У*

M = X k j U U Y , (7)

где *U* - множество допустимых управлений;

У- множество допустимых значений выходов.

Тогда первый этап разделения означает разбиение множества *М* на подмножества переменных координации *К* и множество переменных локальных задач Л:

К cz М;К = XvjU **иУ** **(8)**

X czX,U czU.Y czY (9)

€ € €

Л aM;Л =X<jU^>Y *(10)*

€ € €

X czX;U <zU;Y czY , *П1)*

где X , U , Y ~ множества переменных исходной задачи, которые используются для координации;

$XvjU^jY'$ множества переменных локальных задач.

На втором этапе осуществляется разбиение множества $Л$ на совокупность подмножеств отдельных локальных задач Jl_f $i=l,2, ...,N.$

$$JJ = Jl_j X Jl_2 X \ \dots \ x/l_N \tag{12}$$

$$Jl\, i \ cz \ Jl;Jli = Xj \ \backslash jU_t \ uYjj = \backslash,2,...,N \tag{<13}$$

$$\overset{\text{€}}{X}i\text{^}X.Ui\overset{\text{€}}{C}.UJt\overset{\text{€}}{C}.YJ\text{^}\overset{\text{€}}{X}Z. \quad . \quad . \quad . \quad .N \ , \tag{14}$$

€ € €

где $Xi.Uj.Yj.i$ = 1,2,..., N ~ подмножества переменных *i-ой* локальной задачи.

Взаимообусловленность указанных множеств выражается в том, что переменные координации из множества K отображаются на множество $Л$ в подмножества $Л_?$ $i=l,2,...,N,$ т. е. имеют место отображения:

$$R. \ K \ ->Л;Л \qquad Л,,i = 1,2,...,N \ , \tag{15}$$

а также

$$Л \ = Я(К)=>Л_1 \ =R_l(K),i \ = \ 1,2,..., \ N. \tag{16}$$

Это означает, что переменные локальных задач являются функциями переменных координации. Имеет место также обратное отображение

$$S : Л, \qquad Л,1 = \backslash,2,...,N : Л \qquad K_{\}} \tag{17}$$

то есть

$$S: Л, \qquad = \tag{18}$$

Отсюда переменные координации - есть функции от переменных локальных задач.

Декомпозиция задачи управления СТС по данной схеме может трактоваться как параметрическая или пространственная. Имеется в виду, что она предполагает разделение пространств координат состояний СТС на подпространства, а также разбиение СТС на подсистемы, с их рассосредоточением в физическом пространстве.

Подобные методы декомпозиции наиболее отработаны для некоторых подклассов задач линейного программирования и транспортной задачи. Существуют разработки для отдельных видов частично целочисленных задач. Для нелинейных задач оптимизации аналогичных методов, тем более доведенных до уровня практической применимости, значительно меньше.

Задачи оптимального управления СТС, как отмечалось выше, обычно являются нелинейными. В связи с этим исследования в области разработки методов декомпозиции, обеспечивающих эффективное их решение, весьма актуальны и имеют большое практическое значение.

Таким образом, систематизированы и обоснованы требования, которым должна удовлетворять задача управления СТС, для того, чтобы к ее решению можно было применить декомпозиционный подход. Показано, при каких обстоятельствах задача управления СТС будет обладать свойством сепарабельности, т. е. доступна для декомпозиции. Наряду с этим разработана формальная процедура, в которой содержится обобщенный алгоритм декомпозиции таких задач.

Литература

1. *Ху Вен-Цен, Володин В. М.* Об одном алгоритме декомпозиции в задачах оптимизации химико-технологических систем // ТОХТ АН СССР. - 1978. - № 6, т. 12. - С. 889-895.

2. *Лэсдон Л. С.* Оптимизация больших систем / Пер. с англ. - М.: Наука, 1975. - 432 с.

3. *Ху Вен-Цен, Умбетов У., Коштанова Н.* Децентрализованное проектирование и управление в технологических процессах с гибкой структурой // Индустриально-инновационное развитие - основа устойчивой экономики Казахстана: Матер. Междунар. науч.-практ. конф. - Шымкент, 2006. - Т. 3. - С. 492-494.