УДК 539.3:534.1

ЗАДАЧА О ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ НА МНОГОСЛОЙНУЮ ТОНКОСТЕННУЮ ОБОЛОЧКУ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.Н. Украинец, М.К. Бейсембаев, С.Р. Гирнис, А.К. Тлеулесов
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

В статье [1] решена задача о действии на внутреннюю поверхность тонкой круговой цилиндрической однородной (однослойной) оболочки, расположенной в упругом пространстве, неосесимметричной подвижной нагрузки. Используя данное решение, в настоящей работе рассматривается подобная задача в случае неоднородности (многослойности) оболочки.

Рассмотрим бесконечно длинную круговую цилиндрическую многослойную тонкостенную оболочку, состоящую из N концентрических слоёв с разными физико-механическими и геометрическими характеристиками, расположенную в линейно-упругом, однородном и изотропном пространстве, отнесённому к подвижной цилиндрической системе координат $r, \theta, \eta = z - ct$ (рисунок 1). В силу малости толщины слоёв оболочки можно принять, что они контактируют вдоль срединных поверхностей. Контакт между слоями оболочки и оболочки с окружающей её упругой средой (массивом) полагаем жёстким.

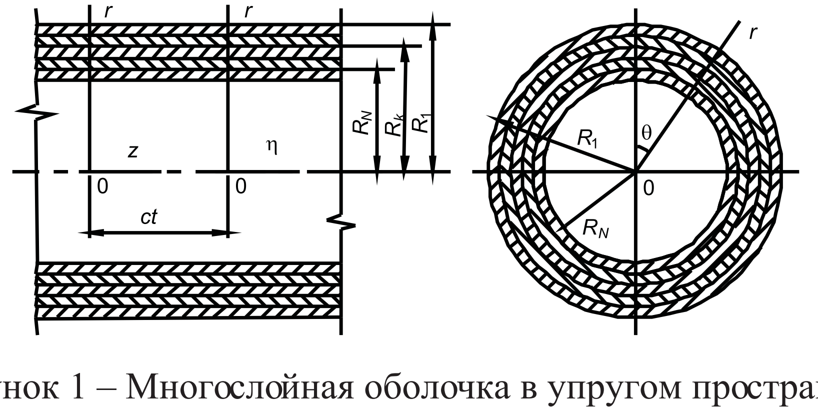

Рисунок 1 – Многослойная оболочка в упругом пространстве

Пусть на внутреннюю поверхность оболочки действует движущаяся с постоянной скоростью c в направлении оси z нагрузка интенсивностью

$P(\theta,\eta)$, периодичная по η и представима в виде синусоидальной нагрузки с произвольной зависимостью от угловой координаты

$$P(\theta,\eta)=p(\theta)e^{i\xi\eta}, \quad p(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n e^{in\theta}, \tag{1}$$

$$P_j(\theta,\eta)=p_j(\theta)e^{i\xi\eta}, \quad p_j(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_{jn} e^{in\theta}, \quad j=r,\theta,\eta,$$

где $P_j(\theta,\eta)$ – составляющие интенсивности подвижной нагрузки $P(\theta,\eta)$.

При этом будем считать, что скорость движения нагрузки меньше скорости распространения волн сдвига в окружающей оболочку среде (дозвуковой случай).

Последовательно пронумеруем слои оболочки, присвоив контактирующему с массивом слою порядковый номер 1. Для описания движения k-го слоя воспользуемся классическими уравнениями теории тонких оболочек в подвижной системе координат [1], переписанными в виде

$$\begin{gathered}
\left[1-\frac{(1-\nu_{0k})\rho_{0k}c^2}{2\mu_{0k}}\right]\frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial\eta^2}+\frac{1-\nu_{0k}}{2R_k^2}\frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial\theta^2}+\frac{1+\nu_{0k}}{2R_k}\frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial\eta\partial\theta}+\frac{\nu_{0k}}{R_k}\frac{\partial u_{0rk}}{\partial\eta}= \\
=\frac{1-\nu_{0k}}{2\mu_{0k}h_{0k}}(q_{\eta k}-q_{\eta k-1}), \\
\frac{1+\nu_{0k}}{2R_k}\frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial\eta\partial\theta}+\frac{(1-\nu_{0k})}{2}\left(1-\frac{\rho_{0k}c^2}{\mu_{0k}}\right)\frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial\eta^2}+\frac{1}{R_k^2}\frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial\theta^2}+\frac{1}{R_k^2}\frac{\partial u_{0rk}}{\partial\theta}= \\
=\frac{1-\nu_{0k}}{2\mu_{0k}h_{0k}}(q_{\theta k}-q_{\theta k-1}), \\
\frac{\nu_{0k}}{R_k}\frac{\partial u_{0\eta k}}{\partial\eta}+\frac{1}{R_k^2}\frac{\partial u_{0\theta k}}{\partial\theta}+\frac{h_{0k}^2}{12}\nabla^2\nabla^2 u_{0rk}+\frac{(1-\nu_{0k})\rho_{0k}c^2}{2\mu_{0k}}\frac{\partial^2 u_{0rk}}{\partial\eta^2}+\frac{u_{0rk}}{R_k^2}= \\
=-\frac{1-\nu_{0k}}{2\mu_{0k}h_{0k}}(q_{rk}-q_{rk-1}),
\end{gathered} \tag{2}$$

где $k = 1, 2,\ldots N$; ν_{0k}, μ_{0k}, ρ_{0k} и h_{0k} – коэффициент Пуассона, модуль сдвига, плотность и толщина k-го слоя; u_{0jk} и q_{jk}, q_{jk-1} – соответственно перемещения точек срединной поверхности k-го слоя и составляющие реакции смежных слоёв ($j = \eta, \theta, r$), при $k = 1$ $q_{j0}=\sigma_{rj}\big|_{r=R_1}$ – составляющие реакции окружающей оболочку среды (σ_{rj} – компоненты тензора напряжений в среде), при $k = N$ $q_{jN}=P_j(\theta,\eta)$; ∇^2 – оператор Лапласа.

Для описания движения массива используем динамические уравнения теории упругости

$$\left(M_p^{-2}-M_s^{-2}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+M_s^{-2}\nabla^2\mathbf{u}=\partial^2\mathbf{u}/\partial\eta^2 . \tag{3}$$

Здесь $M_p = c/c_p$, $M_s = c/c_s$ – числа Маха, $c_p = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$, $c_s = (\mu/\rho)^{1/2}$ – скорости распространения волн расширения – сжатия и сдвига в массиве, $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu)$; ν, μ, ρ – коэффициент Пуассона, модуль сдвига, плотность среды; $\mathbf{u}$ – вектор смещения среды.

Вектор $\mathbf{u}$ можно выразить через потенциалы Ламе [2]

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi_1 + \operatorname{rot}(\varphi_2\mathbf{e}_\eta) + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\varphi_3\mathbf{e}_\eta), \tag{4}$$

которые, как следует из (3) и (4), удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2\varphi_j = M_j^2\,\partial^2\varphi_j/\partial\eta^2,\ j = 1, 2, 3, \tag{5}$$

где $M_1 = M_p$, $M_2 = M_3 = M_s$.

В установившемся состоянии зависимость всех величин от η имеет вид (1), поэтому $\varphi_j(r, \theta, \eta) = \Phi_j(r, \theta)e^{i\xi\eta}$,

$$\nabla_2^2\Phi_j - m_j^2\xi^2\Phi_j = 0,\ j = 1,2,3, \tag{6}$$

где ∇_2^2 – двумерный оператор Лапласа, $m_j = (1 - M_j^2)^{1/2}$,

$$u_{0jk}(\theta,\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{0njk}e^{in\theta}e^{i\xi\eta}, \tag{7}$$

$$q_{jk}(\theta,\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_{njk}e^{in\theta}e^{i\xi\eta},\ j = r, \theta, \eta.$$

Выразив компоненты напряжённо-деформированного состояния (НДС) среды через потенциалы Ламе можно получить выражения для перемещений u_l $(l = r, \theta, \eta)$ и напряжений σ_{lm} $(l, m = r, \theta, \eta)$ от синусоидальной нагрузки как функции от Φ_j.

В дозвуковом случае $M_s < 1$, и решения уравнений (6) имеют вид:

$$\Phi_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj}K_n(k_j r)e^{in\theta}. \tag{8}$$

Здесь $K_n(k_j r)$ – функции Макдональда, $k_j = |m_j\xi|$, a_{nj} – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, $j = 1,2,3$.

Подставляя найденные для потенциалов соотношения в выражения для u_l и σ_{lm} $(l, m = r, \theta, \eta)$, получим для них новые выражения, где неизвестными будут только коэффициенты a_{nj}.

Определим эти коэффициенты по аналогии с [1] из граничных условий на поверхности полости, допуская, что, в силу малости толщины оболочки, $R_k = R$, где R – радиус поверхности полости, $k = 1, 2,\ldots N$. По этой же причине и исходя из условия жёсткого сцепления слоёв оболочки и последней с массивом, принимаем

$$u_{0jk} = u_{0j},\ k = 1, 2, \ldots, N,\ j = \eta, \theta, r. \qquad (9)$$

Тогда граничные условия на поверхности полости будут иметь такой же, как в [1] вид

$$u_j\big|_{r=R} = u_{0j}\ ,\ \ j = \eta, \theta, r\ . \qquad (10)$$

Подставляя (7) с учётом (9) в (2), для n-го члена разложения получим

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{1k}^2 u_{0n\eta} + \nu_{02k} n\xi_0 u_{0n\theta} - 2i\nu_{0k}\xi_0 u_{0nr} = G_{0k}\left(q_{n\eta k} - q_{n\eta k-1}\right),\\
&\nu_{02k} n\xi_0 u_{0n\eta} + \varepsilon_{2k}^2 u_{0n\theta} - 2inu_{0nr} = G_{0k}\left(q_{n\theta k} - q_{n\theta k-1}\right),\\
&2i\nu_{0k}\xi_0 u_{0n\eta} + 2inu_{0n\theta} + \varepsilon_{3k}^2 u_{0nr} = G_{0k}\left(q_{nrk} - q_{nrk-1}\right),
\end{aligned} \qquad (11)$$

где $k = 1, 2, \ldots, N$;

$$\varepsilon_{1k}^2 = \alpha_{0k}^2 - \varepsilon_{0k}^2,\ \varepsilon_{2k}^2 = \beta_{0k}^2 - \varepsilon_{0k}^2,\ \varepsilon_{3k}^2 = \gamma_{0k}^2 - \varepsilon_{0k}^2,\ \ \xi_0 = \xi R,$$

$$\alpha_{0k}^2 = 2\xi_0^2 + \nu_{01k} n^2,\ \beta_{0k}^2 = \nu_{01k}\xi_0^2 + 2n^2,\ \gamma_{0k}^2 = \chi_k^2\left(\xi_0^2 + n^2\right)^2 + 2,\ \varepsilon_{0k}^2 = \nu_{01k}\xi_0^2 M_{s0k}^2,$$

$$\nu_{01k} = 1 - \nu_{0k}, \nu_{02k} = 1 + \nu_{0k},\ M_{s0k} = c/c_{s0k}, c_{s0k} = \sqrt{\frac{\mu_{0k}}{\rho_{0k}}},\ \chi_k^2 = \frac{h_{0k}^2}{6R^2},\ G_{0k} = -\frac{\nu_{01k}R^2}{\mu_{0k}h_{0k}}.$$

Если разделить обе части уравнений (11) на G_{0k} и произвести суммирование систем этих уравнений по k от 1 до N, то можно получить вместо k систем уравнений – одну, подобного [1] вида

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1^2 u_{0n\eta} + \nu_{02} n\xi_0 u_{0n\theta} - 2i\nu_0\xi_0 u_{0nr} = P_{n\eta} - q_{n\eta 0},\\
&\nu_{02} n\xi_0 u_{0n\eta} + \varepsilon_2^2 u_{0n\theta} - 2inG_0^{-1} u_{0nr} = P_{n\theta} - q_{n\theta 0},\\
&2i\nu_0\xi_0 u_{0n\eta} + 2inG_0^{-1} u_{0n\theta} + \varepsilon_3^2 u_{0nr} = P_{nr} - q_{nr0},
\end{aligned} \qquad (12)$$

где $\varepsilon_1^2 = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{1k}^2 / G_{0k},\ \varepsilon_2^2 = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{2k}^2 / G_{0k},\ \varepsilon_3^2 = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{3k}^2 / G_{0k},\ \nu_0 = \sum_{k=1}^{N} \nu_{0k} / G_{0k},$

$\nu_{02} = \sum_{k=1}^{N} \nu_{02k} / G_{0k},\ G_0^{-1} = \sum_{k=1}^{N} 1/G_{0k}.$

Разрешая (12) относительно $u_{0n\eta}$, $u_{0n\theta}$, u_{0nr}, находим

$$u_{0n\eta} = \frac{1}{\delta_n}\sum_{j=1}^{3}\delta_{\eta j}\left(P_{nj} - q_{nj0}\right)$$

$$u_{0n\theta} = \frac{1}{\delta_n}\sum_{j=1}^{3}\delta_{\theta j}\left(P_{nj} - q_{nj0}\right)$$

$$u_{0nr} = \frac{1}{\delta_n}\sum_{j=1}^{3}\delta_{rj}\left(P_{nj} - q_{nj0}\right).$$

Здесь $\delta_n = \delta_{|n|} = \left(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\right)^2 - \left(\varepsilon_1\xi_1\right)^2 - \left(\varepsilon_2\xi_2\right)^2 - \left(\varepsilon_3\xi_3\right)^2 + 2\xi_1\xi_2\xi_3,$

$$\delta_{\eta1} = \left(\varepsilon_2\varepsilon_3\right)^2 - \xi_1^2, \quad \delta_{\eta2} = \xi_1\xi_2 - \xi_3\varepsilon_3^2, \quad \delta_{\eta3} = i\left(\varepsilon_2^2\xi_2 - \xi_1\xi_3\right)$$

$$\delta_{\theta1} = \delta_{\eta2}, \quad \delta_{\theta2} = \left(\varepsilon_1\varepsilon_3\right)^2 - \xi_2^2, \quad \delta_{\theta3} = i\left(\varepsilon_1^2\xi_1 - \xi_2\xi_3\right)$$

$$\delta_{r1} = -\delta_{\eta3}, \quad \delta_{r2} = -\delta_{\theta3}, \quad \delta_{r3} = \left(\varepsilon_1\varepsilon_2\right)^2 - \xi_3^2,$$

$$\xi_1 = 2nG_0^{-1}, \quad \xi_2 = 2\nu_0\xi_0, \quad \xi_3 = \nu_0^2\xi_0 n,$$

для P_{nj} и q_{nj} индекс $j = 1$ соответствует индексу η, $j = 2 - \theta$, $j = 3 - r$.

Подставляя в (10) соответствующие выражения и приравнивая коэффициенты рядов при $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений с определителем нормального типа для определения коэффициентов a_{nj}.

В случае произвольной периодической по η нагрузки, разлагая ее в ряд Фурье, для каждой составляющей ряда получим вышерассмотренную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Украинец В.Н., Гирнис С.Р. Задача о действии неосесимметричной подвижной нагрузки на подкреплённую полость в упругом пространстве. // Вестник ПГУ. Сер. физ.- мат. – Павлодар, 2005. – № 4. – С. 33-41.

2. Гузь Л.И., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наукова думка, 1978. – 308 с.

Түйіндеме

Бұл жұмыста серпімді кеңістікте орналасқан жіңішке көпқабатты айнымалы цилиндрлық қабықшалы қуысына бекітілген осесимметриялық емес қозғалмалы периодты жүктемесінің әсері туралы есебі шешілген.

Қабықша қабатының қозгалысы жіңішке қабықша теориясының классикалық теңдеулермен, ал кеңістік қозгалысы — координаттардың қозгалмалы жүйесіндегі серпінді теориясының динамикалық теңдеулермен сипатталады. Периодты жүктеме қуысының осі бойынша дыбыстық жылдамдыгынан кем массивтің кезінде кернеу-деформациялық күйінің компоненттерін анықтауга арналган есептердің аналитикалық шешімі берілген.

Resume

In persisting work is solved problem about action on supported by fine multi-layer circular cylindrical shell cavity, located in elastic space, asymmetrical rolling periodic load.

Moving the layers of the shell is described by classical equations to theories fine shell, but space – a dynamic equations to theories to bounce in rolling coordinate system. Analytical decision of the problem of the determination component tense-deformed conditions of the array is received under subsonic velocity periodic on axis of the cavities of the load.

УДК 681.51

КОНКУРС ЗАЯВОК НА СРЕДСТВА И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ

Н.Н. Пудич, О.Г. Потапенко
Павлодарский государственный университет им. С.Торайгырова

В настоящее время все большее число как государственных, так и частных предприятий начинают понимать, что в существующих рыночных условиях наиболее рационально технически и выгодно экономически приобретать продукцию, работы, услуги путем проведения конкурсов \(тендерных торгов). Одним из основных этапов конкурса на любую продукцию, работы, услуги является экспертиза полученных конкурсных заявок (предложений), заключающаяся в их оценке и сопоставлении для определения победителя конкурса. От методики организации и проведения экспертизы заявок напрямую зависят результаты конкурса. Этот факт определяет актуальность и практическую важность рассматриваемых в статье вопросов.

Поскольку каждая заявка оценивается по многим, заданным заказчиком критериям (показателям), то и общая ее оценка получается на основе следующей двухэтапной процедуры: