УДК 539.3:534.1

ДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА ТОЛСТОСТЕННУЮ ОБОЛОЧКУ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В.Н. Украинец
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечно длинную круговую цилиндрическую оболочку, расположенную в линейно-упругом, однородном и изотропном полупространстве $x \le h$ параллельно его горизонтальной границе $x = h$ (земной поверхности). Обозначим радиус внешней поверхности оболочки R_1 ($R_1 < h$), радиус внутренней поверхности – R_2. Контакт между оболочкой и окружающей её массивом будем полагать либо жестким, либо скользящим. Пусть на внутреннюю поверхность оболочки действует нагрузка интенсивностью P, движущаяся с постоянной скоростью c в направлении её оси, совпадающей с осью z декартовой системы координат xyz. При этом будем считать, что скорость движения нагрузки меньше скоростей распространения волн сдвига в оболочке и окружающей её среде (дозвуковой случай). Физико-механические свойства массива и оболочки характеризуются соответственно следующими постоянными: $\nu_1, \mu_1, \rho_1; \nu_2, \mu_2, \rho_2$, где ν_k – коэффициент Пуассона, μ_k – модуль сдвига, ρ_k – плотность ($k = 1, 2$). В дальнейшем индекс $k = 1$ относится к массиву, а $k = 2$ – к оболочке.

Определим реакцию упругого полупространства и оболочки на данную подвижную нагрузку, используя для описания движения оболочки и массива динамические уравнения теории упругости

$$(\lambda_k + \mu_k)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_k + \mu_k \nabla^2 \mathbf{u}_k = \rho_k \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial t^2}, \quad k = 1, 2, \tag{1.1}$$

где $\lambda_k = 2\mu_k \nu_k (1 - 2\nu_k)$, $\mathbf{u}_k$ – векторы смещений точек массива и оболочки, ∇^2 – оператор Лапласа.

Так как рассматривается установившийся процесс, то картина деформаций стационарна по отношению к движущейся нагрузке. Поэтому удобно перейти к подвижной системе координат η=z-ct. Тогда уравнения (1.1) примут вид

$$\left(\frac{1}{M_{pk}^2} - \frac{1}{M_{sk}^2}\right)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_k + \frac{1}{M_{sk}^2}\nabla^2 \mathbf{u}_k = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial \eta^2}, \quad k = 1, 2, \tag{1.2}$$

где $M_{pk} = c/c_{pk}, M_{sk} = c/c_{sk}$ – числа Маха; $c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$, $c_{sk} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$ – скорости распространения волн расширения – сжатия и сдвига в массиве ($k = 1$) и оболочке ($k = 2$).

Выражая $\mathbf{u}_k$ через потенциалы Ламе

$$\mathbf{u}_k = \operatorname{grad}\varphi_{1k} + \operatorname{rot}(\varphi_{2k}\mathbf{e}_\eta) + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\varphi_{3k}\mathbf{e}_\eta),\ k = 1, 2, \tag{1.3}$$

преобразуем уравнения (1.2) к виду

$$\nabla^2\varphi_{jk} = M_{jk}^2 \frac{\partial^2\varphi_{jk}}{\partial\eta^2},\ j = 1, 2, 3,\ k = 1, 2. \tag{1.4}$$

Здесь $M_{1k} = M_{pk}, M_{2k} = M_{3k} = M_{sk}$.

Используя (1.3) и закон Гука получаем выражения для компонент напряжённо-деформированного состояния массива ($k = 1$) и оболочки ($k = 2$) в цилиндрической системе координат r, θ, η

$$\begin{gathered}
u_{rk} = \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\varphi_{3k}}{\partial\eta\partial r},\\
u_{\theta k} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\theta} - \frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_{3k}}{\partial\eta\partial\theta},\\
u_{\eta k} = \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\eta} + m_{sk}^2\frac{\partial^2\varphi_{3k}}{\partial\eta^2};
\end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}
\sigma_{\eta\eta k} = (2\mu_k + \lambda_k M_{pk}^2)\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\eta^2} + 2\mu_k m_{sk}^2\frac{\partial^3\varphi_{3k}}{\partial\eta^3},\\
\sigma_{\theta\theta k} = \lambda_k M_{pk}^2\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\eta^2} + \frac{2\mu_k}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\theta^2} + \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^3\varphi_{3k}}{\partial\theta^2\partial\eta} + \frac{\partial^2\varphi_{3k}}{\partial r\partial\eta}\right)\\
\sigma_{rrk} = \lambda_k M_{pk}^2\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\eta^2} + 2\mu_k\left(\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial\theta\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\theta} + \frac{\partial^3\varphi_{3k}}{\partial r^2\partial\eta}\right),\\
\sigma_{r\eta k} = \mu_k\left(2\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\eta\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial\theta\partial\eta} + (1+m_{sk}^2)\frac{\partial^3\varphi_{3k}}{\partial\eta^2\partial r}\right)\\
\sigma_{\eta\theta k} = \mu_k\left(\frac{2}{r}\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\theta\partial\eta} - \frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial r\partial\eta} + \frac{(1+m_{sk}^2)}{r}\frac{\partial^3\varphi_{3k}}{\partial\theta\partial\eta^2}\right),\\
\sigma_{r\theta k} = 2\mu_k\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\theta\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial r^2} - \frac{m_{sk}^2}{2}\frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial\eta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^3\varphi_{3k}}{\partial r\partial\eta\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_{3k}}{\partial\eta\partial\theta}\right),
\end{gathered} \tag{1.6}$$

где $m_{sk}^2 = 1 - M_{sk}^2$.

В декартовых координатах выражения для компонент НДС полупространства имеют вид

$$u_{x1} = \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial x \partial \eta},$$

$$u_{y1} = \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial y \partial \eta}, \tag{1.7}$$

$$u_{\eta 1} = \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \eta} + m_{s1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial \eta^2};$$

$$\sigma_{\eta\eta 1} = (2\mu_1 + \lambda_1 M_{p1}^2) \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 m_{s1}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial \eta^3},$$

$$\sigma_{yy1} = \lambda_1 M_{p1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial y^2 \partial \eta} \right),$$

$$\sigma_{xx1} = \lambda_1 M_{p1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial x^2 \partial \eta} \right),$$

$$\sigma_{x\eta 1} = \mu_1 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial y \partial \eta} + (1 + m_{s1}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial \eta^2 \partial x} \right), \tag{1.8}$$

$$\sigma_{\eta y1} = \mu_1 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial y \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial \eta} + (1 + m_{s1}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial y \partial \eta^2} \right),$$

$$\sigma_{xy1} = 2\mu_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x^2} - \frac{m_{s1}^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial x \partial y \partial \eta} \right).$$

Таким образом, для определения компонент НДС оболочки и окружающей её среды необходимо решить уравнения (1.4) используя следующие граничные условия:

- для свободной от нагрузок поверхности полупространства ($x = h$)

$$\sigma_{xx1} = \sigma_{xy1} = \sigma_{x\eta 1} = 0; \tag{1.9}$$

- для поверхности полости и оболочки при скользящем контакте

при $r = R_1$ $u_{r1} = u_{r2}$, $\sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}$, $\sigma_{r\eta 1} = 0$, $\sigma_{r\theta 1} = 0$, $\sigma_{r\eta 2} = 0$, $\sigma_{r\theta 2} = 0$,

при $r = R_2$ $\sigma_{rj2} = P_j(\theta, \eta)$, $j = r, \theta, \eta$; (1.10,а)

- для поверхности полости и оболочки при жёстком контакте

при $r = R_1$ $u_{j1} = u_{j2}$, $\sigma_{rj1} = \sigma_{rj2}$, при $r = R_2$ $\sigma_{rj2} = P_j(\theta, \eta)$, $j = r, \theta, \eta$. (1.10,б)

Здесь $P_j(\theta,\eta)$ – составляющие интенсивности подвижной нагрузки $P(\theta,\eta)$.

2. Аналитическое решение задачи. Рассмотрим вначале периодическую задачу, когда подвижная нагрузка $P(\theta,\eta)$ периодична по η и представима в виде синусоидальной нагрузки с произвольной зависимостью от угловой координаты

$$P(\theta,\eta)=p(\theta)e^{i\xi\eta},\quad p(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n e^{in\theta},$$

$$P_j(\theta,\eta)=p_j(\theta)e^{i\xi\eta},\quad p_j(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_{jn}e^{in\theta},\quad j=r,\theta,\eta. \tag{2.1}$$

Потенциалы φ_{jk} также будем искать в виде периодических функций по η

$$\varphi_{jk}(r,\theta,\eta)=\Phi_{jk}(r,\theta)e^{i\xi\eta}. \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (1.4), получим

$$\nabla_2^2\Phi_{jk}-m_{jk}^2\xi^2\Phi_{jk}=0,\ j=1,2,3,\ k=1,2, \tag{2.3}$$

где ∇_2^2 – двумерный оператор Лапласа, $m_{jk}^2=1-M_{jk}^2,\ m_{1k}\equiv m_{pk},\ m_{2k}=m_{3k}\equiv m_{sk}$.

Используя (2.2) из (1.5) – (1.8) можно получить выражения для перемещений $\overset{*}{u}_k$ и напряжений $\overset{*}{\sigma}_{lmk}$ от синусоидальной нагрузки в цилиндрической (l, m = r,θ,η; k = 1, 2) и декартовой (l, m = x,y,η; k = 1) системах координат как функции от Φ_{jk}. Определим эти функции.

В дозвуковом случае $M_{sk}<1$ ($m_{sk}>0$, k = 1, 2), и мы приходим к известным решениям [1] уравнений (2.3)

$$\Phi_{jk}=\Phi_{jk}^{(1)}+\Phi_{jk}^{(2)},\ j=1,2,3,\ k=1,2, \tag{2.4}$$

где:

- для полупространства

$$\Phi_{j1}^{(1)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{nj}K_n(k_{j1}r)e^{in\theta},\ \Phi_{j1}^{(2)}=\int_{-\infty}^{\infty}g_j(\xi,\zeta)\exp\left(iy\zeta+(x-h)\sqrt{\zeta^2+k_{j1}^2}\right)d\zeta; \tag{2.5}$$

- для оболочки

$$\Phi_{j2}^{(1)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{nj+3}K_n(k_{j2}r)e^{in\theta},\ \Phi_{j2}^{(2)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{nj+6}I_n(k_{j2}r)e^{in\theta}. \tag{2.6}$$

Здесь $I_n(kr), K_n(kr)$ – функции Бесселя первого и второго рода от мнимого аргумента, $k_{j1}=|m_{j1}\xi|$, $k_{j2}=|m_{j2}\xi|$, j = 1,2,3; $g_j(\xi,\zeta)$, $a_{n1},...,a_{n9}$ – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Как показано в [1], представление потенциалов для полупространства в форме (2.4) приводит к их следующим выражениям в декартовой системе координат:

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + g_j(\xi, \zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta, \qquad (2.7)$$

где $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}$, $\Phi_{jn} = \left(\frac{\zeta + f_j}{k_{j1}} \right)^n$, $j = 1,2,3$.

Воспользуемся переписанными для σ^*_{xj1} граничными условиями (1.9), с учётом (2.7). Выделяя коэффициенты при $e^{iy\zeta}$ и приравнивая, в силу произвольности y, их нулю, получим систему трёх уравнений, из которой выражаем $g_j(\xi,\zeta)$ через коэффициенты a_{nj}:

$$g_j(\xi, \zeta) = \frac{1}{\Delta^*} \sum_{l=1}^{3} \Delta^*_{jl} e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl}. \qquad (2.8)$$

Вид определителя Δ^* и алгебраических дополнений Δ^*_{jl} совпадает с аналогичными определителями для неподкрепленной полости в упругом полупространстве и определён в [1]. В частности, здесь Δ^* – это определитель Рэлея, который в данном случае имеет вид

$$\Delta^*(\xi,\zeta) = (2\rho_*^2 - M_{s1}^2 \xi^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - M_{p1}^2 \xi^2} \sqrt{\rho_*^2 - M_{s1}^2 \xi^2}, \quad \rho_*^2 = \xi^2 + \zeta^2,$$

и не обращается в ноль при любых ζ, если скорость бегущей нагрузки меньше скорости рэлеевской волны c_R в полупространстве. В противном случае в точках $\zeta = \pm\zeta^* = \pm|\xi|\sqrt{M_R^2 - 1}$, $M_R = c / c_R$ он обращается в ноль, и интегралы в формуле (2.7) становятся расходящимися.

Пусть $\tilde{n} < \tilde{n}_R$. В этом случае все подынтегральные функции в (2.4) непрерывны и экспоненциально стремятся к нулю на бесконечности. С учетом (2.8), формулы (2.7) имеют вид

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{l=1}^{3} \frac{\Delta^*_{jl}}{\Delta^*} e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl} \right] e^{iy\zeta} d\zeta. \qquad (2.9)$$

Воспользовавшись известным разложением $\exp(ikr\cos\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta}$ [1], представим потенциалы для полупространства (2.4) в цилиндрической системе координат, используя (2.8)

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_{nj} K_n(k_{j1} r) + b_{nj} I_n(k_{j1} r) \right) e^{in\theta}, \qquad (2.10)$$

где $b_{nj}=\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_{ml}A_{nj}^{ml}$, $A_{nj}^{ml}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta_{jl}^{*}}{\Delta^{*}}\Phi_{ml}\Phi_{nj}e^{-h(f_l+f_j)}d\zeta$, $j=1,2,3$.

Таким образом, решение периодической задачи сводится к отысканию коэффициентов $a_{n1},...,a_{n9}$, для определения которых, в зависимости от условия сопряжения оболочки со средой, следует воспользоваться граничными условиями (1.10,а) или (1.10,б), переписанными для u_k^* и σ_{rlk}^* ($l = r,\theta,\eta$; $k = 1, 2$) с учётом (2.1). Приравнивая коэффициенты рядов Фурье-Бесселя при $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему ($n = 0, \pm1, \pm2,\ldots$) линейных алгебраических уравнений, для решения которой можно использовать метод редукции или более удобный для решения поставленной задачи метод последовательных отражений [1], позволяющий при каждом последовательном отражении решать систему линейных уравнений блочно-диагонального вида.

Зная решение задачи для синусоидальной нагрузки, реакцию полупространства на движущуюся апериодическую нагрузку характерного для транспортируемых объектов типа $P(\theta,\eta) = p(\theta)p(\eta)$ формально получаем при помощи суперпозиции, используя представление нагрузки и компонент НДС среды в виде интегралов Фурье:

$$P(\theta,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P^{*}(\theta,\xi)e^{i\xi\eta}d\xi=p(\theta)p(\eta)=p(\theta)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}p^{*}(\xi)e^{i\xi\eta}d\xi,$$

$$p^{*}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}p(\eta)e^{-i\xi\eta}d\eta.$$

$$u_l(r,\theta,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_l^{*}(r,\theta,\xi)p^{*}(\xi)d\xi,\quad \sigma_{lm}(r,\theta,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{lm}^{*}(r,\theta,\xi)p^{*}(\xi)d\xi \qquad (2.11)$$

Однако, в зависимости от соотношения скорости бегущей нагрузки и ξ, подынтегральные функции в (2.11) могут иметь особенности, в том числе неинтегрируемые, что связано с наличием свободных волн в оболочках, встроенных в упругую среду [1,2]. При превышении скорости движения нагрузки критических скоростей, которые могут оказаться меньше, чем скорость волны Рэлея в окружающем упругом массиве, а также при дозвуковых скоростях, но превышающих рэлеевскую скорость, интегральные представления решения (2.11) будут иметь иной вид.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. – Алма-Ата: Наука, 1989. – 240 с.
2. Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Динамика упругого полупространства с подкрепленной цилиндрической полостью при подвижных нагрузках // Прикладная механика. – 2009. – № 9. – С.75-85.

Түйіндеме

Серпімді жартылай кеңістігінде қалын қабырғалы қабықшаға жүгірмелі жүктелудің әрекеті туралы нақты аналитикалық шешімі алынған. Берілген мәселе тоннельдердің және жер астына терең көмілмеген құбырлардың кернеулі-деформацияланған күйін зерттеу барысында модельді болып табылады.

Resume

In elastic statement the exact analytical decision of a problem on action of mobile loading on a thick shell in elastic halfspace is received. The given problem is modelling at research tensely-deformed conditions of shallow located tunnels and underground pipelines.

УДК 519.6:517.9

МЕТОД РАСЧЕТА МАССОПЕРЕДАЧИ МЕЖДУ ФАЗАМИ ПРОЯВИТЕЛЬНОГО ХРОМАТОГРАФИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Д.Т. Куренкеева, А.Т. Кенжебаева

Жамбылский Гуманитарно-технический университет

После восстановления профиля хроматографической кривой необходимо рассчитать производные для концентраций в подвижной и неподвижной фазах колонны в выбранных точках пространства [1]. Расчет процесса в неподвижной фазе на основе уравнения диффузии может осуществляться любым методом решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с одной распределенной координатой.

Для расчета по слоям l_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ значений для

$$\psi'_j(l_k) = \frac{\partial y(t, x_j, l_k)}{\partial t}, \qquad (1)$$