УДК 530.145

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ С МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЭФФЕКТОМ

**С.К. Тлеукенов**
*Евразийский национальный университет им. Л. Гумилева, г. Астана*
**М.К. Жукенов**
*Павлодарский государственный университет им. С.Торайгырова*

Современный прогресс в науке и технике неразрывно связан с развитием наших знаний в области композиционных материалов. Спектр применений композиционных материалов чрезвычайно широк - от космических аппаратов до бытовых приборов. Важное место среди известных композиционных материалов занимают материалы, уникальные свойства которых обусловлены существованием магнитоэлектрического эффекта.

В последние годы, благодаря исследованиям магнитоэлектрического эффекта появилась надежда на его широкое практическое применение.

Анизотропные среды характеризуются обилием параметров. Одним из конструктивных путей преодоления этих трудностей является последовательное и детальное изучение свойств решений уравнений Максвелла в достаточно широком классе анизотропных сред с тем, чтобы установить закономерности этих решений от структуры тензорных величин, определяющих анизотропию среды. В данном исследовании рассматриваются гармонически зависящие от времени решения уравнений Максвелла в диэлектрических средах с магнитоэлектрическим эффектом.

Представление решений волновых полей $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D}$ рассматриваются в виде:

$$\vec{F} = \vec{F}(z)e^{i\omega t \pm k_x x \pm k_y y} \quad (1)$$

где $\omega$ - частота, $k_x, k_y$ – соответственно $x$ - и $y$ - компоненты волнового вектора. Свойства среды от координат $x$ и $y$ не зависят, т.е. предполагается, что среда неоднородна вдоль оси $z$ .

При отсутствии объемной плотности зарядов $\rho$, вектора плотности токов и гармонической зависимости решений волновых полей от времени уравнения Максвелла принимают вид:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega\vec{B},\ \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega\vec{D} \qquad (2)$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0,\ \mathrm{div}\vec{D} = 0 \qquad (3)$$

К данным уравнения необходимо добавить материальные уравнения:

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_j E_j,\quad \varepsilon_j = \varepsilon_j(\omega)$$
$$\vec{B}_j = \mu_0 \mu_j \vec{H}_i,\ \mu = \mu_j(\vec{\omega}) \qquad (4)$$

Среда полагается непроводящей.

Магнитоэлектрический эффект заключается в индуцировании электрической поляризации в материале во внешнем магнитном поле или в появлении намагниченности во внешнем электрическом поле.

Материальные уравнения связывающие $\vec{B}$ и $\vec{H}$, $\vec{D}$ и $\vec{E}$ получаем из свободной энергии

$$F=F_{эм}+F_{мэ} \qquad (5)$$

где $F_{эм}$ – свободная энергия для электромагнитного поля

$$F_{эм} = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_i E_j + \mu_0 \mu_{ij} H_i H_j \qquad (6)$$

$F_{мэ}$ – свободная энергия для поля с магнитоэлектрическим эффектом

$$F_{мэ} = -\alpha_{ik} E_i H_k \qquad (7)$$

Тогда материальные уравнения есть:

$$\frac{\partial F}{\partial E_i} = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j - \alpha_{ij} H_j = D_i \qquad (8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial H_i} = \mu_0 \mu_{ij} H_i - \alpha_{ij} E_i = B_j \qquad (9)$$

где $\varepsilon_{ij}$, $\mu_{ij}$ – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости для описания этих свойств среды; $\alpha_{ik}$ – несимметричный тензор материальных параметров магнитоэлектрического эффекта.

Для анизотропных диэлектриков с магнитоэлектрическим эффектом тетрагональной, тригональной и гексагональной сингонии на основе метода матрицанта систему уравнений, опысывающая распространение электромагнитных волн, можно привести к эквивалентной системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\vec{U}}{dz} = B\vec{U} \quad \vec{U} = (E_y, H_x, H_y, E_x) \qquad (10)$$

Решая в системе соотношения (2), (4), (8), (9) получим:

$$\frac{dE_y}{dz}=i\left[\frac{k_xk_y}{\beta}\alpha_{11}E_y+\mu_0\left(\frac{k_y^2}{\beta}\mu_2+\omega\mu_1\right)H_x-\frac{k_xk_y}{\beta}\mu_0\mu_2H_y-\left(\frac{k_y^2}{\beta}\alpha_{11}+\omega\alpha_\perp\right)E_x\right]$$

$$\frac{dH_x}{dz}=i\left[\varepsilon_0\left(\frac{k_x^2}{\beta}\varepsilon_2+\omega\varepsilon_1\right)E_y+\frac{k_xk_y}{\beta}\alpha_{11}H_x-\left(\frac{k_x^2}{\beta}\alpha_{11}+\omega\alpha_\perp\right)H_y-\frac{k_xk_y}{\beta}\varepsilon_0\varepsilon_2E_x\right]$$

$$\frac{dH_y}{dz}=i\left[\frac{k_xk_y}{\beta}\varepsilon_0\varepsilon_2E_y+\left(\frac{k_y^2}{\beta}\alpha_{11}+\omega\alpha_\perp\right)H_x-\frac{k_xk_y}{\beta}\alpha_{11}H_y-\varepsilon_0\left(\frac{k_x^2}{\beta}\varepsilon_2+\omega\varepsilon_1\right)E_x\right]$$

$$\frac{dE_x}{dz}=i\left[\left(\frac{k_x^2}{\beta}\alpha_{11}+\omega\alpha_\perp\right)E_y+\frac{k_xk_y}{\beta}\mu_0\mu_2H_x-\mu_0\left(\frac{k_x^2}{\beta}\mu_2+\omega\mu_1\right)H_y-\frac{k_xk_y}{\beta}\alpha_{11}E_x\right] \tag{11}$$

где $\beta=\omega\left(\alpha_\perp^2-\varepsilon_0\varepsilon_2\mu_0\mu_2\right)$

Таким образом матрица коэффициентов $B$ имеет вид:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{11} & b_{23} & b_{24} \\ -b_{24} & -b_{14} & -b_{11} & b_{34} \\ -b_{23} & -b_{13} & b_{43} & -b_{11} \end{pmatrix} \tag{12}$$

где

$$b_{11}=i\frac{k_xk_y}{\beta}\alpha_{11} \qquad b_{12}=i\mu_0\left(\frac{k_y^2}{\beta}\mu_2+\omega\mu_1\right) \qquad b_{13}=-i\frac{k_xk_y}{\beta}\mu_0\mu_2$$

$$b_{14}=-i\left(\frac{k_y^2}{\beta}\alpha_{11}+\omega\alpha_\perp\right) \qquad b_{21}=i\varepsilon_0\left(\frac{k_x^2}{\beta}\varepsilon_2+\omega\varepsilon_1\right) \qquad b_{23}=-i\left(\frac{k_x^2}{\beta}\alpha_{11}+\omega\alpha_\perp\right)$$

$$b_{24}=-i\frac{k_xk_y}{\beta}\varepsilon_0\varepsilon_2 \qquad b_{34}=-i\varepsilon_0\left(\frac{k_y^2}{\beta}\varepsilon_2+\omega\varepsilon_1\right) \qquad b_{43}=-i\mu_0\left(\frac{k_x^2}{\beta}\mu_2+\omega\mu_1\right)$$

Распространение волн в координатных плоскостях описывается матрицей $B$:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & -b_{14} & 0 & b_{34} \\ -b_{23} & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

При распространений волны в плоскости xz ($k_y=0$) элементы матрицы имеют вид:

$$b_{12}=i\varpi\mu_0\mu_1 \qquad b_{14}=-i\varpi\alpha_\perp \qquad b_{21}=i\varepsilon_0\left(\frac{k_x^2}{\beta}\varepsilon_2+\omega\varepsilon_1\right)$$

$$b_{23}=-i\left(\frac{k_x^2}{\beta}\alpha_{11}+\omega\alpha_\perp\right) \qquad b_{34}=-i\varpi\varepsilon_0\varepsilon_1 \qquad b_{43}=-i\mu_0\left(\frac{k_x^2}{\beta}\mu_2+\omega\mu_1\right) \tag{14}$$

При распространений волны в плоскости yz ($k_x=0$) элементы матрицы имеют вид:

$$b_{12}=i\mu_0\left(\frac{k_y^2}{\beta}\mu_2+\omega\mu_1\right)\qquad b_{14}=-i\left(\frac{k_y^2}{\beta}\alpha_{11}+\omega\alpha_{\perp}\right)\qquad b_{21}=i\varpi\varepsilon_0\varepsilon_1$$

$$b_{23}=-i\varpi\alpha_{\perp}\quad b_{34}=-i\varepsilon_0\left(\frac{k_y^2}{\beta}\varepsilon_2+\omega\varepsilon_1\right)\qquad b_{12}=-i\varpi\mu_0\mu_1 \tag{15}$$

Структура матрицы коэффициентов B совпадает со структурой матрицы B [3] формула 1.2.14. Вследствие этого можно основываясь на результаты монографии [3] сразу выписать структуру фундаментальных решений системы уравнений (11):

$$T^{-1}_{ч,нч}=\begin{pmatrix} t_{22} & t_{12} & -t_{42} & -t_{32}\\ t_{21} & t_{11} & -t_{41} & -t_{31}\\ -t_{24} & -t_{14} & t_{44} & t_{34}\\ -t_{14} & -t_{13} & t_{43} & t_{33}\end{pmatrix}_{ч,нч} \tag{16}$$

$$T^{-1}=T^{-1}_{ч}-iT^{-1}_{нч} \tag{17}$$

Из общей структуры фундаментальных решений получиться структура фундаментальных решений при распространений волн в координатных плоскостях:

$$T^{-1}_{ч}=\begin{pmatrix} t_{22} & 0 & -t_{42} & 0\\ 0 & t_{11} & 0 & -t_{31}\\ -t_{24} & 0 & t_{44} & 0\\ 0 & -t_{13} & 0 & t_{33}\end{pmatrix}\quad T^{-1}_{нч}=\begin{pmatrix} 0 & t_{12} & 0 & -t_{32}\\ t_{21} & 0 & -t_{41} & 0\\ 0 & -t_{14} & 0 & t_{34}\\ -t_{23} & 0 & t_{43} & 0\end{pmatrix}$$

$$T^{1}=\begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{42} & -t_{32}\\ -t_{21} & t_{11} & t_{41} & -t_{31}\\ -t_{24} & t_{14} & t_{44} & -t_{34}\\ t_{23} & -t_{13} & -t_{43} & t_{33}\end{pmatrix} \tag{18}$$

В связи с широким применением периодически неоднородные среды являются одним из важных классов неоднородных сред. Структура фундаментальных решений дает возможность определить самые общие уравнения дисперсии электромагнитных волн в периодически неоднородных средах с магнитоэлектрическим эффектом. При распространении электромагнитных волн в координатных плоскостях уравнения дисперсии определяются из условия:

$$\det\left(P-E\cos\tilde{k}h\right)=0 \tag{19}$$

здесь

$$P=\frac{1}{2}\left(T+T^{-1}\right) \tag{20}$$

Из структур $\mathrm{T}$ и $\mathrm{T}^{-1}$ структура матрицы $\mathrm{P}$ будет иметь вид:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & P_{13} & P_{14} \\ 0 & P_{11} & P_{14} & P_{24} \\ -P_{24} & P_{14} & P_{33} & 0 \\ P_{14} & -P_{13} & 0 & P_{33} \end{pmatrix} \tag{21}$$

из этого:

$$\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2 = \frac{1}{2}\left( P_{11} + P_{22} \pm \sqrt{(P_{11} - P_{22})^2 + 4(P_{14}P_{14} + P_{13}P_{24})} \right) \tag{22}$$

общий вид уравнения дисперсий:

$$\cos \widetilde{\mathrm{k}}_1 \mathrm{h} = \widetilde{\mathrm{P}}_1 \quad \cos \widetilde{\mathrm{k}}_2 \mathrm{h} = \widetilde{\mathrm{P}}_2 \tag{23}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электодинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982 г.

2. Вайнштейн Б.К., Современная кристаллография. Том-4. Наука, 1979г.

3. Тлеукенов С.К., Оспанов А.Т. Изучение электомагнитных полей в анизотропных средах. – Алматы: Наука, 1985. – 176 с.

4. Тлеукенов С.К. О характеристической матрице периодически неоднородного слоя. В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. – Ленинград: Зап. научн. семин., ЛОМИ, 1987. - Т.165. - С. 177-181.

5. Тлеукенов С.К., Метод матриканта, Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004г., 148 с.

6. Байгонысов О., Тлеукенов С.К. О методе решения некоторых задач распространения упругих волн при наличии периодической неоднородности. - Ленинград: Зап. научн. сем. ЛОМИ АН СССР, 1985 т. 148. - С. 30-33.

7. Тлеукенов С.К. О характеристической матрице периодически неоднородного слоя. В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. – Ленинград: Зап. научн. семин., ЛОМИ, 1987. - Т.165. - С. 177-181.

8. Tleykenov S. The structure of propagabor matrix and it is application in the case of the periodical inhomogeneous media. Abstr. Semin. on Earthquake processes and their consequences Seismological investigations. 1989. - Kurukshetra, India. - P. 4.

9. Tleykenov S. Investigation of the thin layer influence of the boundary conditions. Abstacts «Seminar on eastquare processe and their consequences». - Kurukshetra. India. 1989.

***Түйіндеме***

*Жұмыста магнитэлектрлік эффектісі бар анизотропты диэлектрлік орта үшін уақыттан гармоникалық тәуелділікте болатын Максвелл* *теңдеулерінің шешімдері қарастырылады. Максвелл теңдеулерінің фундаментал шешімдерінің құрылымы анықталды (матрицант құрылымы). Алынған құрылымның негізінде магнитэлектрлік эффектісі бар периодты біртексіз орталарда электромагниттік толқындардың дисперсия теңдеулері анықталды. Магнитэлектрлік эффектті зерттеу нәтижелерін магнит өрістердің және АЖЖ жаңа магнитэлектрлік бергіштерін құрастыруда қолдануға болады.*

***Resume***

*In work harmoniously time-dependent decisions of equations Maxwell for anisotropic dielectric environments with magnetoelectric effect are considered. The structure of fundamental decisions of equations Maxwell (structure matrizer) is defined. On the basis of the received structure the equations of a dispersion of electromagnetic waves in periodically non-uniform environments with magnetoelectric effect are defined. Results of research of magnetoelectric effect can be applied, for example, in working out of new magnetoelectric gauges of a magnetic field and microwave frequency capacities. For such applications magnetoelectric materials are the most suitable thanks to a wide working temperature range.*

УДК 539.3:534.2

# О РЕШЕНИИ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОЙ ВОЛНЫ

**С.К. Тлеукенов, Н.А. Испулов**

*Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова*

Матрица коэффициентов $B$ (если параметры среды постоянны) в случае распространения одномерной термоупругой волны в анизотропной среде ромбической сингонии имеет вид [1]:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega\, b_{17} & b_{87} & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

здесь, коэффициенты $b_{ij}$ равны: