factors have been gotten. It is shown that there is some ordering in distribution of particles of plasma medium, which can be possible. Radial functions of distribution and static structural factors of particles partially ionized quasiclassical plasmas are investigated. Elektron-electronic spatial dependences of radial function of distribution and the static structural factor have monotonous character unlike dependences similar a proton-nuclear.

УДК 539.3:534.2

О ЗАДАЧЕ ОТРАЖЕНИЯ – ПРЕЛОМЛЕНИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ ТЕРМОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

А.К. Сейтханова
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

Матрица коэффициентов B в случае распространения термоупругой волны в анизотропной среде тетрагональной сингонии классов 4, $\bar{4}$, 4/m в одномерном случае (m=0,n=0) [1]:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega\, b_{17} & b_{87} & 0 \end{pmatrix}; \qquad (1)$$

Компоненты матрицы коэффициентов (1) имеют вид:

$$b_{12}=\frac{1}{c_{33}}, \qquad b_{17}=\frac{(2\beta_{13}+\beta_{33})}{c_{33}}, \qquad b_{21}=-\omega^2\rho,$$

$$b_{87}=-i\omega\left(\frac{\beta_{33}^2}{c_{11}}+\frac{c_\varepsilon}{T_0}\right),\ b_{78}=-\frac{1}{\lambda_{33}}.$$

Во втором приближении имеем

$$P_{(2)}=E+\frac{B^2}{2}h^2; \qquad (2)$$

где E – единичная матрица,

B – матрица коэффициентов,

h – период неоднородности.

$$P_{(2)}=\frac{h^2}{2}\begin{pmatrix}0 & b_{12} & b_{17} & 0\\ b_{21} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b_{78}\\ 0 & -i\omega b_{17} & b_{87} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & b_{12} & b_{17} & 0\\ b_{21} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b_{78}\\ 0 & -i\omega b_{17} & b_{87} & 0\end{pmatrix}+E=$$

$$=\begin{pmatrix}P_1 & 0 & 0 & P_{14}\\ 0 & P_1 & P_{23} & 0\\ 0 & -i\omega P_{14} & P_2 & 0\\ -i\omega P_{23} & 0 & 0 & P_2\end{pmatrix}; \qquad (3)$$

Компоненты матрицы коэффициентов (3) имеют вид:

$$P_1=1+\frac{1}{2}h^2b_{12}b_{21};\quad P_{14}=\frac{1}{2}h^2b_{17}b_{78};$$

$$P_{23}=\frac{1}{2}h^2b_{17}b_{21};\ P_2=1+\frac{1}{2}h^2b_{78}b_{87};$$

В связи с широким применением периодически неоднородные среды являются одним из важных классов неоднородных сред. Структура фундаментальных решений дает возможность определить самые общие уравнения дисперсии термоупругих волн в периодически неоднородных средах.

Условием существования нетривиальных решений для определения волновых чисел, является равенство следующего определителя [2]:

$$det\left|P_{(2)}-\lambda E\right|=0; \qquad (4)$$

Корни характеристического уравнения имеют вид:

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{b_{12}b_{21}}{2}+\frac{b_{78}b_{87}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{b_{12}^2b_{21}^2-2b_{12}b_{21}b_{78}b_{87}+b_{78}^2b_{87}^2-4i\omega b_{17}^2b_{21}b_{78}}};$$

$$\lambda_2=-\sqrt{\frac{b_{12}b_{21}}{2}+\frac{b_{78}b_{87}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{b_{12}^2b_{21}^2-2b_{12}b_{21}b_{78}b_{87}+b_{78}^2b_{87}^2-4i\omega b_{17}^2b_{21}b_{78}}};$$

$$\lambda_3=\sqrt{\frac{b_{12}b_{21}+b_{78}b_{87}-\sqrt{b_{12}^2b_{21}^2-2b_{12}b_{21}b_{78}b_{87}+b_{78}^2b_{87}^2-4i\omega b_{17}^2b_{21}b_{78}}}{2}}; \qquad (5)$$

$$\lambda_4=-\sqrt{\frac{b_{12}b_{21}+b_{78}b_{87}-\sqrt{b_{12}^2b_{21}^2-2b_{12}b_{21}b_{78}b_{87}+b_{78}^2b_{87}^2-4i\omega b_{17}^2b_{21}b_{78}}}{2}};$$

Абсолютным значением волновых векторов упругой и тепловой волны второй среды k и χ равны:

$$k=\sqrt{\frac{1}{2}(-b_{12}b_{21}-\sqrt{(b_{12}b_{21}-b_{78}b_{87})^2-4i\omega b_{17}^2 b_{21}b_{78}});}$$
$$\chi=\sqrt{\frac{1}{2}(-b_{12}b_{21}+\sqrt{(b_{12}b_{21}-b_{78}b_{87})^2-4i\omega b_{17}^2 b_{21}b_{78}});} \qquad (6)$$

Матрица *П* имеет вид:

$$Ï=\frac{1}{\tilde{p}_1-\tilde{p}_2}(P_{(2)}-\frac{1}{2}(\tilde{p}_1+\tilde{p}_2)E) \qquad (7)$$

В матричном виде уравнение (7) примет вид:

$$П=\begin{pmatrix} П_1 & 0 & 0 & П_{14} \\ 0 & П_1 & П_{23} & 0 \\ 0 & -i\omega П_{14} & -П_1 & 0 \\ -i\omega П_{23} & 0 & 0 & -П_1 \end{pmatrix}; \qquad (7)^{/}$$

Компоненты матрицы коэффициентов $(7)^{/}$ имеют вид:

$$Ï_1=\frac{b_{12}b_{21}-b_{78}b_{87}}{2(\chi^2-k^2)};\ Ï_{14}=\frac{b_{17}b_{78}}{\chi^2-k^2};\ Ï_{23}=\frac{b_{17}b_{21}}{\chi^2-k^2};$$

В рамках метода матриканта усредненный матрицант, описывающий распространение связанных гармонических термоупругих волн в анизотропных средах с термомеханическим эффектом имеет вид [2]:

$$T^{\pm}_{уср}=\left(\pi+\frac{1}{2}E\right)\left(E\cos kz\pm\frac{B}{k}\sin kz\right)-\left(\pi-\frac{1}{2}E\right)\left(E\cos\chi z\pm\frac{B}{\chi}\sin\chi z\right) \qquad (8)$$

$$\frac{d\vec{W}}{dz}=B\vec{W} \quad \vec{W}=\left(U_z,\sigma_{zz},U_x,\sigma_{xz},U_y,\sigma_{yz},\theta,q_z\right)$$

где

$$\cos kz=\frac{e^{ikz}+e^{-ikz}}{2};\ \sin kz=\frac{e^{ikz}-e^{-ikz}}{2}; \qquad (9)$$

С учетом (9) и принимая, что физический смысл имеет $e^{-ik(c)z}$ (8) запишется в виде:

$$T = \left(\Pi + \frac{1}{2}E\right)\frac{1}{2}\left(Ee^{-ikz} - \frac{B}{ik}e^{-ikz}\right) - \left(\Pi - \frac{1}{2}E\right)\frac{1}{2}\left(Ee^{-i\chi z} - \frac{B}{\chi}e^{-i\chi z}\right); \quad (10)$$

Усредненный матрицант T_0^+ в этом случае для термоупругой среды примет вид:

$$T_0^+ = (\Pi + \frac{1}{2}E)(E - \frac{B}{ik}) - (\Pi - \frac{1}{2}E)(E - \frac{B}{i\chi}); \quad (11)$$

Структура матрицанта (11) примет вид:

$$T_0^{\pm} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & 0 \\ t_{21} & 1 & 0 & t_{24} \\ t_{31} & 0 & 1 & t_{34} \\ 0 & t_{42} & t_{43} & 1 \end{pmatrix}; \quad (12)$$

где

$$t_{12} = -b_{12}b_{78}b_{87} - i\omega b_{17}^2 b_{78} + \sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{13} = b_{17}\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{21} = -b_{21}b_{78}b_{87} + \sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{24} = b_{17}b_{21}b_{78};$$

$$t_{31} = -i\omega b_{17}b_{21}b_{78};$$

$$t_{34} = -b_{12}b_{21}b_{78} + \sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{42} = -i\omega b_{17}\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{43} = -b_{12}b_{21}b_{87} - i\omega b_{17}^2 b_{21} + \sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

При z=0 усредненный матрицант (11) может быть записан в виде:

$$T_0^{\pm} = \frac{1}{2}E \mp R; \quad (13)$$

Матрица R имеет вид:

$$R=\frac{1}{2i}\left(\frac{k-\chi}{k\chi}\right)\pi B-\frac{1}{4i}\left(\frac{k+\chi}{k\chi}\right)B \tag{14}$$

где

$$T_0^{\pm}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & t_{12} & t_{13} & 0\\ t_{21} & 1 & 0 & t_{24}\\ t_{31} & 0 & 1 & t_{34}\\ 0 & t_{42} & t_{43} & 1\end{pmatrix}; \tag{15}$$

Компоненты матрицы (15) получены в виде:

$$t_{12}=-b_{12}b_{78}b_{87}-i\omega b_{17}^2b_{78}+\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87}+i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{13}=b_{17}\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87}+i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{21}=-b_{21}b_{78}b_{87}+\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87}+i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{24}=b_{17}b_{21}b_{78};$$

$$t_{31}=-i\omega b_{17}b_{21}b_{78};$$

$$t_{34}=-b_{12}b_{21}b_{78}+\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87}+i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{42}=-i\omega b_{17}\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87}+i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{43}=-b_{12}b_{21}b_{87}-i\omega b_{17}^2b_{21}+\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87}+i\omega b_{17}^2)};$$

Полагая: $\vec{U}_P$ - поле падающих волн, $\vec{U}_R$ - поле отраженных волн и $\vec{U}_t$ - поле преломленных волн, на основе [3]

$$\vec{U}_P+\vec{U}_R=\vec{U}_t; \tag{16}$$

имеем:

$$T_0^P\vec{U}_P+T_0^R\vec{U}_R=T_0^t\vec{U}_t, \text{ при } z=0$$

или

$$\left(\frac{1}{2}E-R_0\right)\vec{U}_P+\left(\frac{1}{2}E+R_0\right)\vec{U}_R=\left(\frac{1}{2}E-R_t\right)\vec{U}_t; \tag{17}$$

Учитывая непрерывность полей на контакте сред (16):

получим:

$$R_0\vec{U}_P - R_0\vec{U}_R = R_t\vec{U}_t; \qquad (18)$$

С учетом (16) выражение (18) есть искомое граничное условие для векторов $\vec{U}_P, \vec{U}_R, \vec{U}_t$ в матричной форме.

В (16) и (18) неизвестны вектора $\vec{U}_R$ и $\vec{U}_t$. Подстановка (16) в (18) дает уравнение:

$$(R_0 + R_t)\vec{U}_R = (R_0 - R_t)\vec{U}_P;$$

откуда следует представление для отраженных волн:

$$\vec{U}_R = (R_0 + R_t)^{-1}(R_0 - R_t)\vec{U}_0;$$

Поле преломленных волн $\vec{U}_t$ определяется формулой (16).
Пусть

$$R_0 + R^t = Q_1, R_0 - R^t = Q_2; \qquad (19)$$

Тогда

$$\vec{U}_R = (Q)^{-1}(Q)\vec{U}_P \qquad (20)$$

Элементы матриц Q^+ и Q^- определяются как

$$\tau_{ij}^{+} = r_{ij}^{0} + r_{ij}^{t}, \tau_{ij}^{-} = r_{ij}^{0} - r_{ij}^{t}; \qquad (21)$$

Поле отраженных волн:

$$\vec{U}_R = G\vec{U}_P; \qquad (22)$$

Из (16):

$$\vec{U}_R = \vec{U}_t - \vec{U}_P; \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (22) получим поле преломленных волн [4]:

$$\vec{U}_t = (G + E)\vec{U}_P; \qquad (24)$$

где

$$G=\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & 0 \\ g_{41} & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix}; \qquad (25)$$

элементы матрицы G получены в виде:

$$g_{11}=-1+\frac{2b_{21}(b_{78}+a\chi r_{34})}{b_{21}(b_{78}+a\chi r_{34})+ak(ia\omega\chi r_{24}^{2}+r_{21}(b_{78}+a\chi r_{34}))};,$$

$$g_{14}=-\frac{2ab_{78}kr_{24}}{b_{21}(b_{78}+a\chi r_{34})+ak(ia\omega\chi r_{24}^{2}+r_{21}(b_{78}+a\chi r_{34}))};$$

$$g_{22}=-1+\frac{2b_{12}(b_{87}+a\chi r_{43})}{b_{12}(b_{87}+a\chi r_{43})+ak(ia\omega\chi r_{13}^{2}+r_{12}(b_{87}+a\chi r_{43}))};$$

$$g_{23}=-\frac{2ab_{87}kr_{13}}{b_{12}(b_{87}+a\chi r_{43})+ak(ia\omega\chi r_{13}^{2}+r_{12}(b_{87}+a\chi r_{43}))};$$

$$g_{32}=\frac{2ia\omega b_{12}\chi r_{13}}{b_{12}(b_{87}+a\chi r_{43})+ak(ia\omega\chi r_{13}^{2}+r_{12}(b_{87}+a\chi r_{43}))};$$

$$g_{33}=-1+\frac{2b_{87}(b_{12}+akr_{12})}{b_{12}(b_{87}+a\chi r_{43})+ak(ia\omega\chi r_{13}^{2}+r_{12}(b_{87}+a\chi r_{43}))};$$

$$g_{41}=\frac{2ia\omega b_{21}\chi r_{24}}{b_{21}(b_{78}+a\chi r_{34})+ak(ia\omega\chi r_{24}^{2}+r_{21}(b_{78}+a\chi r_{34}))};$$

$$g_{44}=-1+\frac{2b_{78}(b_{21}+akr_{21})}{b_{21}(b_{34}+a\chi r_{34})+ak(ia\omega\chi r_{24}^{2}+r_{21}(b_{78}+a\chi r_{34}))};$$

Поскольку

$$\vec{U}_R=\left(U_{zR},\sigma_{zR},\theta_{R,}q_{zR}\right)$$
$$\vec{U}_t=\left(U_{zt},\sigma_{zt},\theta_{t,}q_{zt}\right) \qquad (26)$$

полагая

$$\vec{U}_P=\left(U_{zP},\sigma_{zP},0,0\right) \qquad (27)$$

Подставляя в уравнение (22), получим поле отраженных волн:

$$\begin{pmatrix} U_{zR} \\ \sigma_{zR} \\ \theta_R \\ q_{zR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & 0 \\ g_{41} & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} U_{zP} \\ \sigma_{zP} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{28}$$

$$U_{zR} = g_{11} U_{zP;} \;\; \sigma_{zR} = g_{22} \sigma_{zP};$$

$$\theta_R = g_{32} \sigma_{zP}; \;\; q_{zR} = g_{41} U_{zP};$$

Подставляя в уравнение (24) получем поле преломленных волн:

$$\begin{pmatrix} U_{zt} \\ \sigma_{zt} \\ \theta_t \\ q_{zt} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & 0 \\ g_{41} & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} U_{zP} \\ \sigma_{zP} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{29}$$

$$U_{zt} = (1 + g_{11}) U_{zP;} \;\; \sigma_{zt} = (1 + g_{22}) \sigma_{zP};$$

$$\theta_t = g_{32} \sigma_{zP}; \;\; q_{zt} = g_{41} U_{zP};$$

Таким образом, работа посвящена приложению матричного метода матриканта к изучению распространения связанных упругих и тепловых волн в анизотропной среде. В работе аналитически решена задача отражения-преломления упругой волны на границе термоупругого пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тлеукенов С.К., Кудерин М.К., Козионов В.А., Испулов Н.А., Баяубаев Е.К., Сейтханова А.К. Динамические и термодинамические процессы в скальных грунтах и строительных конструкциях. Монография под ред. академика АЕН, д.ф.-м.н., профессора С.К. Тлеукенова. - Павлодар, 2006.

2. Тлеукенов С.К Метод матриканта. -Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. 148 с.

3. Тлеукенов С.К., Сейтханова А.К., Ильясов М.Н., Досумбеков К.Р. О матричной формулировке задачи отражения и преломления термоупругих волн // Материалы международной научной конференции «Вторые Ержановские чтения», г. Актобе, 2007 г.

4. Тлеукенов С.К., Сейтханова А.К., ДосумбековК.Р. О коэффициентах отражения и преломления упругих и термоупругих волн // Материалы международной научной конференции «Вторые Ержановские чтения», г. Актобе, 2007 г.

5. Новацкий В. Теория упругости. - М.: «Мир», 1986, 556 с.

6. Айталиев Ш.М., Тлеукенов С.К., Сейтханова А.К. / 4 класты тетрагоналды сингониялы анизотропты ортада термосерпімді толқындардың таралуы туралы. Вестник КазНПУ им. Абая, Серия механика, физика, информатика, Алматы. - 2007.

Түйіндеме

Термомеханикалық эффектімен болатын серпімді орталарда толқындық процестердің заңдылықтарды зерттеу актуалдығы, геофизика, сейсмология, композиттік материалдардың механикасының теориялық және қолданбалы есептерді шешуінде қажеттілігімен байланысты. Байланысқан қозғалыс теңдеулері мен жылуөткізгіштік теңдеулері физика–механикалық параметрлердің күрделігі мен көп болуымен ерекшеленеді. Осыған байланысты деформацияланатын қатты дене механикасының – термосерпімділік деген тарауы қарқынды дамып келеді. Осы бағыттың аясында анизотропты орталардың кейбір физика–механикалық қасиеттерін қолдана отырып, байланысқан жылулық және механикалық өрістер зерттеледі. Берілген мақалада, матрицант әдісі негізінде, 4–ші ретті коэффициенттер матриалары үшін, біртекті анизотропты термосерпімді орталардың шекарасындағы толқындардың шағылу–сыну есебі қарастырылған.

Resume

The urgency of research of laws of wave processes in elastic environments with thermo mechanical effect is connected with necessity of the decision of theoretical and applied problems of geophysics, seismology, mechanics of composite materials etc. Connected equations of movement and the heat conductivity equation differ complexity and an abundance of physical–mechanical parameters. In this connection the section of mechanics of a deformable firm body, - thermo elasticity intensively develops. Within the limits of this direction, leaning against use of certain physical–mechanical properties anisotropic environments, the connected thermal and mechanical fields are studied. In given article, on the basis of a method matrizant, the decision of a problem of reflexion-refraction of waves on border of homogeneous anisotropic thermoelastic environments, for a case of matrixes of factors of 4^th^ order is received.