УДК 530.1:537.8

О СТРУКТУРЕ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД С ПЬЕЗОМАГНИТНЫМ ЭФФЕКТОМ

С.К. Тлеукенов, Т.С. Досанов, Б.А. Кынырбеков
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

Введение. Развитие и применение аналитических методов исследования волновых процессов в анизотропных неоднородных средах представляет собой важную теоретическую проблему. Существующие в настоящее время методы исследования волнового поля в таких средах подробно изложены в работах [1-8].

В данной работе на основе аналитического метода матриканта построена структура матриц коэффициентов неоднородных анизотропных сред ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm и, как следствие, получены структуры матриц коэффициентов для сред: тетрагональной сингонии классов 422, 4mm, $\bar{4}$2m, 4/mmm, тетрагональной сингонии классов 4′22′, 4′mm′, $\bar{4}'$ 2′m, 4′/mmm′, гексагональной сингонии классов 622, 6mm, $\bar{6}$m2, 6/mmm и кубической сингонии классов 23, m3, 4′32′, $\bar{4}'$ 3m′, m3m′. Построение структуры матриц коэффициентов представляет как самостоятельный интерес, так и является отправной точкой для получения последующих важных результатов.

Применение метода матриканта к широкому классу феноменологических сред свидетельствует о его адекватности и эффективности [9,10]. Основным преимуществом метода матриканта является единообразие описания волновых процессов в неоднородных анизотропных средах с различными физико-механическими свойствами.

Полная система уравнений для безграничной пьезомагнитной среды. Определяющие соотношения для анизотропной среды с пьезомагнитным эффектом, как известно, имеют вид [11-13]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - Q_{ijk}H_k \quad (1)$$

$$B_i = \mu_{ij}H_j + Q_{ijk}\varepsilon_{ij} \quad (2)$$

$$D_i = \acute{y}_j E_j \quad (3)$$

где σ_{ij} – тензор напряжения, c_{ijkl} – тензор упругости;

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l}) \tag{4}$$

тензор деформации; Q_{ijk} – тензор пьезомагнитных коэффициентов; $\acute{y}_{ij}$, μ_{ij} – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости; $\vec{H}$, $\vec{E}$ – напряженности магнитного и электрического поля; $\vec{B}$, $\vec{D}$ – индукции магнитного и электрического поля.

Уравнения движения упругой среды [13]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{5}$$

где r – плотность среды; $\vec{u}$ – вектор смещения.

Уравнения Максвелла (вектор плотности тока $\vec{j} = 0$)

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \; rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{6}$$

Матрица коэффициентов. Рассматривается неограниченная анизотропная упругая среда с пьезомагнитным эффектом. Декартова система координат совмещена с соответствующей кристаллографической системой координат анизотропной среды. Среда предполагается неоднородной вдоль оси z.

Для анализа системы уравнений (1)-(6) в случае гармонических волн, используется метод разделения переменных и представления решения в виде:

$$f(x, y, z, t) = f(z)\exp(i\omega t - imx - iny) \tag{7}$$

где m и n – компоненты волнового вектора $\vec{k}$.

На основе представления (7), система уравнений (1)–(6) приводится к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно вектора столбца $\vec{w}$

$$\frac{d\vec{w}}{dz} = \hat{B}\vec{w} \tag{8}$$

где

$$\vec{w} = (u_z, \sigma_{zz}, u_x, \sigma_{xz}, u_y, \sigma_{yz}, E_y, H_x, H_y, E_x)^t \tag{9}$$

– вектор столбец независимых переменных, индекс «*t*» в данном случае означает операцию транспонирования вектора строки в вектор столбец; $\hat{B} = \hat{B}[c_{ijkl}(z), Q_{ijk}(z), \mu_{ij}(z), э_{ij}(z), \rho(z), \omega, m, n]$ – матрица коэффициентов, элементы которой содержат в себе параметры среды в которой распространяются связанные упругие и электромагнитные волны [8]. Множитель $\exp(i\omega t - imx - iny)$ здесь и далее опущен.

Рассмотрим построение системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в случае распространения связанных упругих и электромагнитных волн в анизотропной пьезомагнитной среде **ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm**. Оси декартовой системы координат совместим с соответствующими кристаллографическими осями. Для ромбической сингонии, если оси параллельны нормалям к плоскостям симметрии, независимые модули упругости можно представить в виде следующей матрицы [12]:

$$c_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Матрица пьезомагнитных модулей для ромбической сингонии классов 222, *mm*2, *mmm* имеет вид [12]:

$$Q_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & Q_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{36} \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Тензоры магнитной и электрической проницаемости имеют вид [12]:

$$\mu_{ij} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix}; э_{ij} = \begin{pmatrix} э_{11} & 0 & 0 \\ 0 & э_{22} & 0 \\ 0 & 0 & э_{33} \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Т.е. число физико-механических параметров пьезомагнитной среды ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm, включая плотность среды, равно 19.

Из уравнений (1)-(7) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{c_{33}}\sigma_{zz} + im\frac{c_{13}}{c_{33}}u_x + in\frac{c_{23}}{c_{33}}u_y$$

$$\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{c_{33}}\sigma_{zz}+im\frac{c_{13}}{c_{33}}u_x+in\frac{c_{23}}{c_{33}}u_y$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{zz}}{\mathrm{d}z}=-\rho\omega^2u_z+im\sigma_{xz}+in\sigma_{yz}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}z}=imu_z+\frac{1}{c_{55}}\sigma_{xz}+\frac{Q_{25}}{c_{55}}H_y$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{xz}}{\mathrm{d}z}=im\frac{c_{13}}{c_{33}}\sigma_{zz}+(m^2c_{11}+n^2c_{66}-\rho\omega^2+\frac{(nQ_{36})^2}{\mu_{33}}-\frac{(mc_{13})^2}{c_{33}})u_x-imn\frac{Q_{36}}{\omega\mu_{33}}E_y+$$
$$mn\left((c_{12}+c_{66})+\frac{Q_{36}^2}{\mu_{33}}-\frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}\right)u_y+in^2\frac{Q_{36}}{\omega\mu_{33}}E_x \qquad (13)$$

$$\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{y}}{\mathrm{d}z}=inu_z+\frac{Q_{14}}{c_{44}}H_x+\frac{1}{c_{44}}\sigma_{yz}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{yz}}{\mathrm{d}z}=in\frac{c_{23}}{c_{33}}\sigma_{zz}+mn\left((c_{12}+c_{66})+\frac{Q_{36}^2}{\mu_{33}}-\frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}\right)u_x-i\frac{m^2Q_{36}}{\omega\mu_{33}}E_y+$$
$$(m^2c_{66}+n^2c_{22}-\rho\omega^2+\frac{(mQ_{36})^2}{\mu_{33}}-\frac{(nc_{23})^2}{c_{33}})u_y+inm\frac{Q_{36}}{\omega\mu_{33}}E_x$$

$$\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}z}=i\omega(\mu_{11}-\frac{n^2}{\omega^2э_{33}}+\frac{Q_{14}^2}{c_{44}})H_x+i\omega\frac{Q_{14}}{c_{44}}\sigma_{yz}+i\frac{mn}{\omega э_{33}}H_y$$

$$\frac{\mathrm{d}H_x}{\mathrm{d}z}=mn\frac{Q_{36}}{\mu_{33}}u_x+i\omega\left(э_{22}-\frac{m^2}{\omega^2\mu_{33}}\right)E_y+\frac{m^2Q_{36}}{\mu_{33}}u_y+i\frac{mn}{\omega\mu_{33}}E_x$$

$$\frac{\mathrm{d}H_\mathrm{y}}{\mathrm{d}z}=n^2\frac{Q_{36}}{\mu_{33}}u_x-i\frac{mn}{\omega\mu_{33}}E_y+mn\frac{Q_{36}}{\mu_{33}}u_y-i\omega\left(э_{11}-\frac{n^2}{\omega^2\mu_{33}}\right)E_x$$

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{x}}{\mathrm{d}z}=-i\omega\frac{Q_{25}}{c_{55}}\sigma_{xz}-i\frac{mn}{\omega э_{33}}H_x-i\omega\left(\mu_{22}-\frac{m^2}{\omega^2э_{33}}+\frac{Q_{25}^2}{c_{55}}\right)H_y$$

Остальные переменные выражаются через десять основных, следующим образом

$$\sigma_{xx}=\frac{c_{13}}{c_{33}}\sigma_{zz}+im\left(\frac{c_{13}^2}{c_{33}}-c_{11}\right)u_x+in\left(\frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}-c_{12}\right)u_y;$$

$$\sigma_{yy}=\frac{c_{23}}{c_{33}}\sigma_{zz}+im\left(\frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}-c_{12}\right)u_x+in\left(\frac{c_{23}^2}{c_{33}}-c_{22}\right)u_y;$$

$$\sigma_{xy} = -in\left(c_{66} + \frac{Q_{36}^2}{\mu_{33}}\right)u_x - im\left(c_{66} + \frac{Q_{36}^2}{\mu_{33}}\right)u_y - \frac{mQ_{36}}{\omega\mu_{33}}E_y + \frac{nQ_{36}}{\omega\mu_{33}}E_x;$$

$$E_z = \frac{n}{\omega э_{33}}H_x - \frac{m}{\omega э_{33}}H_y;$$

$$H_z = \frac{inQ_{36}}{\mu_{33}}u_x + \frac{imQ_{36}}{\mu_{33}}u_y + \frac{m}{\omega\mu_{33}}E_y - \frac{n}{\omega\mu_{33}}E_x$$

Из системы (13) следует система обыкновенных дифференциальных уравнений для пьезомагнитных кристаллов тетрагональной сингонии классов 422, 4mm, $\bar{4}$2m, 4/mmm, тетрагональной сингонии классов 4′22′, 4′mm′, $\bar{4}'$2′m, 4′/mmm′, гексагональной сингонии классов 622, 6mm, $\bar{6}$m2, 6/mmm и кубической сингонии классов 23, m3, 4′32′, $\bar{4}'$3m′, m3m′.

Для пьезомагнитных кристаллов классов 422, 4mm, $\bar{4}$2m, 4/mmm

$$c_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \quad Q_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & Q_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\mu_{ij} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix}; э_{ij} = \begin{pmatrix} э_{11} & 0 & 0 \\ 0 & э_{11} & 0 \\ 0 & 0 & э_{33} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Поэтому в (13) необходимо сделать замены $c_{22} = c_{11}$, $c_{23} = c_{13}$, $c_{55} = c_{44}$, $Q_{25} = -Q_{14}$, $Q_{36} = 0$, $э_{22} = э_{11}$ и $\mu_{22} = \mu_{11}$, т.е. число параметров среды уменьшается на 7, и становится равным 12.

Для классов 4′22′, 4′mm′, $\bar{4}'$2′m, 4′/mmm′, матрицы тензора упругости, диэлектрической и магнитной проницаемости такие же, как и у классов 422, 4mm, $\bar{4}$2m, 4/mmm, т.е. имеют вид (14) и (15), а матрица пьезомагнитных коэффициентов несколько отлична

$$Q_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & Q_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{36} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Поэтому в (13) нужно положить $c_{22}=c_{11}$, $c_{23}=c_{13}$, $c_{55}=c_{44}$, $Q_{25}=-Q_{14}$, $Q_{36}=0$, $э_{22}=э_{11}$ и $\mu_{22}=\mu_{11}$, т.е. число параметров становится равным 13.

Для классов 622, 6mm, $\overline{6}$m2, 6/mmm, матрицы пьезомагнитных коэффициентов, диэлектрической и магнитной проницаемости такие же, как и у классов 422, 4mm, $\overline{4}$2m, 4/mmm, т.е. имеют вид (14) и (15), а матрица тензора упругости

$$c_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11}-c_{12})/2 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

Поэтому в (13) полагаем $c_{22}=c_{11}$, $c_{23}=c_{13}$, $c_{55}=c_{44}$, $Q_{25}=-Q_{14}$, $Q_{36}=0$, $э_{22}=э_{11}$ и $\mu_{22}=\mu_{11}$, т.е. число параметров становится равным 11.

Для классов 23, m3, 4′32′, $\overline{4'}$3m′, m3m′

$$c_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix},\ Q_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & Q_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{14} \end{pmatrix} \qquad (18)$$

$$\mu_{ij}=\begin{pmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{11} \end{pmatrix}; э_{ij}=\begin{pmatrix} э_{11} & 0 & 0 \\ 0 & э_{11} & 0 \\ 0 & 0 & э_{11} \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Поэтому в (13) полагаем $c_{22}=c_{11}$, $c_{23}=c_{13}$, $c_{55}=c_{44}$, $Q_{25}=-Q_{14}$, $Q_{36}=0$, $э_{22}=э_{11}$ и $\mu_{22}=\mu_{11}$, т.е. число параметров становится равным 7.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (13) позволяет записать структуру матрицы коэффициентов $\hat{B}$, входящей в уравнение (8), и вектор столбец независимых переменных, в объемном случае для пьезомагнитных сред **ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm** [14,15]:

$$\hat{B}=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{39} & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & b_{47} & 0 & 0 & b_{410} \\ b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & b_{58} & 0 & 0 \\ 0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & b_{67} & 0 & 0 & b_{610} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega b_{58} & 0 & b_{78} & b_{79} & 0 \\ 0 & 0 & i\omega b_{47} & 0 & i\omega b_{67} & 0 & b_{87} & 0 & 0 & b_{810} \\ 0 & 0 & -i\omega b_{410} & 0 & -i\omega b_{610} & 0 & -b_{810} & 0 & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{39} & 0 & 0 & 0 & -b_{79} & b_{109} & 0 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

Вектор столбец имеет вид (9).

Из структуры матрицы коэффициентов видно, что в объемном случае продольная упругая волна связана с поперечной упругой волной x поляризации (не равенство нулю элементов b_{13} и b_{24}) и с поперечной волной y поляризации (наличие элементов b_{15} и b_{26}). Продольная упругая волна не связана с электромагнитными TE и TM волнами. Упругая волна x поляризации связана с упругой волной y поляризации (не равенство нулю элемента b_{45}), с электромагнитной TE волной (отличие от нуля элемента b_{47}) и электромагнитной TM волной (не равенство нулю элемента $b410_{47}$). Упругая волна y поляризации связана с электромагнитной TE волной (наличие отличных от нуля элементов b_{58} и b_{67}) и электромагнитной TM волной (отличный от нуля элемент b_{610}). Электромагнитная TE волна связана с электромагнитной TM волной (не равенство нулю элементов b_{79} и b_{810}).

Элементы матрицы $\hat{B}$ (20) имеют вид:

$$b_{12}=\frac{1}{c_{33}};\ b_{13}=\frac{imc_{13}}{c_{33}};\ b_{15}=\frac{inc_{23}}{c_{33}};\ b_{21}=-\rho\omega^2;\ b_{24}=im;\ b_{26}=in;\ b_{34}=\frac{1}{c_{55}};$$

$$b_{39}=\frac{Q_{25}}{c_{55}};\ b_{43}=-\rho\omega^2+m^2\left(c_{11}-\frac{c_{13}{}^2}{c_{33}}\right)+n^2\left(c_{66}+\frac{Q_{36}{}^2}{\mu_{33}}\right);$$

$$b_{45}=mn\left(c_{12}+c_{66}-\frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}+\frac{Q_{36}^2}{\mu_{33}}\right);\ b_{47}=-\frac{imnQ_{36}}{\omega\mu_{33}};\ b_{410}=\frac{in^2Q_{36}}{\omega\mu_{33}};\ b_{56}=b_{39};\ b_{58}=\frac{Q_{14}}{c_{44}};$$

$$b_{65}=-\rho\omega^2+n^2\left(c_{22}-\frac{c_{23}^2}{c_{33}}\right)+m^2\left(c_{66}+\frac{Q_{36}{}^2}{\mu_{33}}\right);\ b_{67}=-\frac{im^2Q_{36}}{\omega\mu_{33}};\ b_{610}=\frac{imnQ_{36}}{\omega\mu_{33}};$$

$$b_{78}=i\omega\left(\mu_{11}-\frac{n^2}{\omega^2\text{э}_{33}}+\frac{Q_{14}^2}{c_{44}}\right);\ b_{79}=\frac{imn}{\omega\text{э}_{33}};\ b_{87}=i\omega\left(\text{э}_{22}-\frac{m^2}{\omega^2\mu_{33}}\right);\ b_{810}=\frac{inm}{\omega\mu_{33}}$$

$$b_{910} = -i\omega\left(э_{11} - \frac{n^2}{\omega^2\mu_{33}}\right);\ b_{109} = -i\omega\left(\mu_{22} - \frac{m^2}{\omega^2 э_{33}} + \frac{Q_{25}^2}{c_{55}}\right)$$

Анализ структуры матрицы коэффициентов (20) в случае распространения волн вдоль плоскостей и в одномерном случае приведен в статье [14].

Для сред тетрагональной сингонии классов **4′22′, 4′mm′,** $\bar{4}'$**2m′, 4′/mmm′** матрица коэффициентов, как следует из (13) с учетом (14)-(16), имеет структуру аналогичную (20). Однако в этом случае некоторые из элементов b_{ij} имеют несколько иной вид:

$$b_{12} = \frac{1}{c_{33}};\ b_{13} = \frac{imc_{13}}{c_{33}};\ b_{15} = \frac{inc_{23}}{c_{33}};\ b_{21} = -\rho\omega^2;\ b_{24} = im;\ b_{26} = in;\ b_{34} = \frac{1}{c_{44}};$$

$$b_{39} = \frac{Q_{14}}{c_{44}};\ b_{43} = -\rho\omega^2 + m^2\left(c_{11} - \frac{c_{13}{}^2}{c_{33}}\right) + n^2\left(c_{66} + \frac{Q_{36}{}^2}{\mu_{33}}\right);$$

$$b_{45} = mn\left(c_{12} + c_{66} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} + \frac{Q_{36}^2}{\mu_{33}}\right);\ b_{47} = -\frac{imnQ_{36}}{\omega\mu_{33}};\ b_{410} = \frac{in^2Q_{36}}{\omega\mu_{33}};\ b_{56} = b_{34};\ b_{58} = b_{39};$$

$$b_{65} = -\rho\omega^2 + n^2\left(c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}\right) + m^2\left(c_{66} + \frac{Q_{36}{}^2}{\mu_{33}}\right);\ b_{67} = -\frac{im^2Q_{36}}{\omega\mu_{33}};\ b_{610} = \frac{imnQ_{36}}{\omega\mu_{33}};$$

$$b_{78} = i\omega\left(\mu_{11} - \frac{n^2}{\omega^2 э_{33}} + \frac{Q_{14}^2}{c_{44}}\right);\ b_{79} = \frac{imn}{\omega э_{33}};\ b_{87} = i\omega\left(э_{11} - \frac{m^2}{\omega^2\mu_{33}}\right);\ b_{810} = \frac{inm}{\omega\mu_{33}};$$

$$b_{910} = -i\omega\left(э_{11} - \frac{n^2}{\omega^2\mu_{33}}\right);\ b_{109} = -i\omega\left(\mu_{11} - \frac{m^2}{\omega^2 э_{33}} + \frac{Q_{25}^2}{c_{55}}\right).$$

Для сред кубической сингонии классов **23, m3, 4′32′,** $\bar{4}'$**3m′, m3m′** матрица коэффициентов, как следует из (13) с учетом (18)-(19), имеет структуру аналогичную (20). Однако в этом случае некоторые элементы имеют несколько иной вид:

$$b_{12} = \frac{1}{c_{11}};\ b_{13} = \frac{imc_{12}}{c_{11}};\ b_{15} = \frac{inc_{12}}{c_{11}};\ b_{21} = -\rho\omega^2;\ b_{24} = im;\ b_{26} = in;\ b_{34} = \frac{1}{c_{44}};$$

$$b_{39} = \frac{Q_{14}}{c_{44}};\ b_{43} = -\rho\omega^2 + m^2\left(c_{11} - \frac{c_{12}{}^2}{c_{11}}\right) + n^2\left(c_{44} + \frac{Q_{14}{}^2}{\mu_{11}}\right);$$

$$b_{45} = mn\left(c_{12} + c_{44} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} + \frac{Q_{14}^2}{\mu_{11}}\right);\ b_{47} = -\frac{imnQ_{14}}{\omega\mu_{11}};\ b_{410} = \frac{in^2Q_{14}}{\omega\mu_{11}};\ b_{56} = b_{39};\ b_{58} = b_{39};$$

$$b_{65}=-\rho\omega^2+n^2\left(c_{11}-\frac{c_{12}^2}{c_{11}}\right)+m^2\left(c_{44}+\frac{Q_{14}^{\;2}}{\mu_{11}}\right);\; b_{67}=-\frac{im^2Q_{14}}{\omega\mu_{11}};\; b_{610}=\frac{imnQ_{14}}{\omega\mu_{11}};$$

$$b_{78}=i\omega\left(\mu_{11}-\frac{n^2}{\omega^2 э_{11}}+\frac{Q_{14}^2}{c_{44}}\right);\; b_{79}=\frac{imn}{\omega э_{11}};\; b_{87}=i\omega\left(э_{11}-\frac{m^2}{\omega^2\mu_{11}}\right);\; b_{810}=\frac{inm}{\omega\mu_{11}};$$

$$b_{910}=-i\omega\left(э_{11}-\frac{n^2}{\omega^2\mu_{11}}\right);\; b_{109}=-i\omega\left(\mu_{11}-\frac{m^2}{\omega^2 э_{11}}+\frac{Q_{14}^2}{c_{44}}\right).$$

Тетрагональная сингония классов **422, 4mm, $\bar{4}$2m, 4/mmm**. Система (13) с учетом (14)-(15) позволяет записать:

$$\hat{B}=\begin{pmatrix}
0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{39} & 0\\
0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & b_{58} & 0 & 0\\
0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega b_{58} & 0 & b_{78} & b_{79} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{87} & 0 & 0 & b_{810}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{810} & 0 & 0 & b_{910}\\
0 & 0 & 0 & -i\omega b_{39} & 0 & 0 & 0 & -b_{79} & b_{109} & 0
\end{pmatrix} \quad (21)$$

Матрица коэффициентов (21) отличается от матрицы (20) тем, что в ней равны нулю элементы b_{47}, b_{410}, b_{67} и b_{610}.

Элементы матрицы (21)

$$b_{12}=\frac{1}{c_{33}};\; b_{13}=\frac{imc_{13}}{c_{33}};\; b_{15}=\frac{inc_{13}}{c_{33}};\; b_{21}=-\rho\omega^2;\; b_{24}=im;\; b_{26}=in;\; b_{34}=\frac{1}{c_{44}};$$

$$b_{39}=-\frac{Q_{14}}{c_{44}};\; b_{43}=-\rho\omega^2+m^2\left(c_{11}-\frac{c_{13}^{\;2}}{c_{33}}\right)+n^2c_{66};\; b_{45}=mn\left(c_{12}+c_{66}-\frac{c_{13}^2}{c_{33}}\right);\; b_{56}=b_{34};$$

$$b_{58}=-b_{39};\; b_{65}=-\rho\omega^2+n^2\left(c_{11}-\frac{c_{13}^2}{c_{33}}\right)+m^2c_{66};\; b_{78}=i\omega\left(\mu_{11}-\frac{n^2}{\omega^2 э_{33}}+\frac{Q_{14}^2}{c_{44}}\right);$$

$$b_{79}=\frac{imn}{\omega э_{33}};\; b_{87}=i\omega\left(э_{11}-\frac{m^2}{\omega^2\mu_{33}}\right);\; b_{810}=\frac{inm}{\omega\mu_{33}};\; b_{910}=-i\omega\left(э_{11}-\frac{n^2}{\omega^2\mu_{33}}\right);$$

$$b_{109}=-i\omega\left(\mu_{11}-\frac{m^2}{\omega^2 э_{33}}+\frac{Q_{14}^2}{c_{44}}\right).$$

Для сред гексагональной сингонии классов **622, 6mm, $\bar{6}$2m, 6/mmm** матрица коэффициентов, как следует из (13) с учетом (14), (15) и (17), имеет структуру аналогичную (21). Только в этом случае некоторые из элементов b_{ij} имеют несколько иной вид:

$$b_{12}=\frac{1}{c_{33}};\ b_{13}=\frac{imc_{13}}{c_{33}};\ b_{15}=\frac{inc_{13}}{c_{33}};\ b_{21}=-\rho\omega^2;\ b_{24}=im;\ b_{26}=in;\ b_{34}=\frac{1}{c_{44}};$$

$$b_{39}=-\frac{Q_{14}}{c_{44}};\ b_{43}=-\rho\omega^2+m^2\left(c_{11}-\frac{c_{13}{}^2}{c_{33}}\right)+\frac{n^2(c_{11}-c_{12})}{2};\ b_{45}=\frac{mn}{2}\left(c_{11}+c_{12}-\frac{2c_{13}^2}{c_{33}}\right);$$

$$b_{56}=b_{34};\ b_{58}=-b_{39};\ b_{65}=-\rho\omega^2+n^2\left(c_{11}-\frac{c_{13}^2}{c_{33}}\right)+\frac{m^2(c_{11}-c_{12})}{2};$$

$$b_{78}=i\omega\left(\mu_{11}-\frac{n^2}{\omega^2\text{э}_{33}}+\frac{Q_{14}^2}{c_{44}}\right);\ b_{79}=\frac{imn}{\omega\text{э}_{33}};\ b_{87}=i\omega\left(\text{э}_{11}-\frac{m^2}{\omega^2\mu_{33}}\right);\ b_{810}=\frac{inm}{\omega\mu_{33}};$$

$$b_{910}=-i\omega\left(\text{э}_{11}-\frac{n^2}{\omega^2\mu_{33}}\right);\ b_{109}=-i\omega\left(\mu_{11}-\frac{m^2}{\omega^2\text{э}_{33}}+\frac{Q_{14}^2}{c_{55}}\right).$$

Заключение. Таким образом, в данной статье построена структура матриц коэффициентов для неоднородных анизотропных пьезомагнитных сред некоторых классов кубической, гексагональной, тетрагональной и ромбической сингонии. Вычислен явный вид элементов матриц коэффициентов для рассматриваемых сред. Проведен анализ структур матриц коэффициентов, выявлена связь и взаимная трансформация волн различной поляризации и различной физической природы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Волны и слоистых средах. – М.:Наука, 1973. – 343 с.

2. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. – М.: Наука. – 1989. – 416 с.

3. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. – М.: Наука, 1956. – 386 с.

4. Федоров Ф. И. Теория гиротропии. – Минск.: Наука и техника, 1976. – 456 с.

5. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982. – 239 с.

6. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. – Москва, 1973. – 456 с.

7. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред – Акуст. журн. – 1968. – Т. 14 – № 1. – С. 1-24.

8. Кравцов Ю.А., Найда О.Н., Фуки А.А. Волны в слабоанизотропных трехмерно неоднородных средах: квазиизотропное приближение геометрической оптики – УФН. – 1996. – Том 166 – № 2. – С. 456-464.

9. Тлеукенов С.К. О характеристической матрице периодически неоднородного слоя. – В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. – Ленинград: Зап. научн. семин., ЛОМИ. – 1987. – Т. 165. – С. 177-181.

10. Тлеукенов С.К. Метод матрицанта. – Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. – 148 с.

11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. – В 10-ти т. – Т. VIII. – Электродинамика сплошных сред: учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1982, 621 с.

12. Вайнштейн Б.К. Современная кристаллография (в четырех томах). Том 4. Физические свойства кристаллов /Шувалов Л. Л., Урусовская Л.Л. Желудев И. С. и др. – М.: Наука, 1981. – 496 с.

13. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.

14. Тлеукенов С.К., Досанов Т.С. О распространении пьезомагнитных волн в неограниченной анизотропной среде ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm с пьезомагнитным эффектом – Известия НАН РК. – 2009. – № 5 – С. 69-75.

15. Тлеукенов С.К., Досанов Т.С., Жукенов М.К. Об уравнениях дисперсии связанных волн в периодически-неоднородной анизотропной среде ромбической сингонии классов 222, mm2, mmm с пьезомагнитным эффектом. – Вестник ЕНУ. – 2009. – № 2 – С. 64-68.

Түйіндеме

Жұмыста матрицант әдісі негізінде кубты, гексагоналды, тетрагоналды және ромбты біртексіз анизотропты пьезомагнитті орталардың кейбір кластары үшін коэффициенттер матрицасының құрылымы алынган Қарастырылган орталар үшін коэффициенттер матрицалары элементтерінің айқын түрлері есептелген. Коэффициенттер матрицаларының құрылымына талдау жүргізілді, түрлі поляризациялы және физикалық табигаттары әртүрлі толқындардың байланысы мен өзара трансформациясы анықталды.

Resume

In work on the basis of a method matrizer the structure of matrixes of factors for non-uniform anisotropic piezomagnetic environments of some classes cubic, hexagonal, tetragonal and rhombic system is constructed. The obvious kind of elements of matrixes of factors for considered environments is calculated. The analysis of structures of matrixes of factors is *carried out, communication and mutual transformation of waves of various polarisation and the various physical nature is revealed.*

УДК 530.1:537.8

ОБ ОТРАЖЕНИИ ВОЛН ОТ ОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЬЕЗОМАГНИТНОЙ СРЕДЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ТИПОВ ВОЛН

С.К. Тлеукенов, Т.С. Досанов, Б.А. Кынырбеков
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

Введение. Проблема аналитического исследования отражения связанных упругих и электромагнитных волн на границе анизотропных пьезомагнитных сред представляет как теоретический, так и практический интерес. Об уровне современных исследований в этой области можно судить по обзорным работам [1-7]. В работе [8] решена задача отражения электромагнитных волн на границе анизотропных сред без пьезоэффекта. В статьях [9-12] рассматриваются связанные упругие и электромагнитные волны в магнитоупорядоченных средах. Однако в этих работах изучаются частные случаи анизотропии, причем, анизотропные среды высокой симметрии (кубической, гексагональной).

В данной работе на основе метода матрицанта [13,14] получено аналитическое решение задачи отражения на границе однородного изотропного диэлектрика и однородной анизотропной пьезомагнитной среды для случая когда связаны два типа волны (упругая поперечная и электромагнитная TE или TM волна).

Аналитическое представление матрицанта однородных сред. В случае матриц четвертого порядка аналитический вид матрицанта однородной среды имеет вид [14]:

$$\hat{T}_{одн} = \frac{\hat{P} - p_2\hat{E}}{p_1 - p_2}(\hat{E}\cos kz + \frac{\hat{B}}{k}\sin kz) - \frac{\hat{P} - p_1\hat{E}}{p_2 - p_1}(\hat{E}\cos \kappa z + \frac{\hat{B}}{\kappa}\sin \kappa z) \quad (1)$$

где

$$\hat{P} = \hat{E} + \frac{\hat{B}^2 h^2}{2} \quad (2)$$