УДК 512.544.27

# ЛОКАЛЬНО - КОНЕЧНЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ НЕ FC-ГРУППЫ И ПРОБЛЕМА МИНИМАЛЬНОСТИ В КЛАССЕ ЛОКАЛЬНО - КОНЕЧНЫХ ГРУПП ЧАСТЬ 1

***И.И. Павлюк***
**Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова**

В этой части помещены результаты, которые необходимы для решения проблемы минимальности в классе локально-конечных групп.

Под локально конечной группой будем понимать, как обычно, группу в которой каждое конечное множество элементов порождает конечную подгруппу. С.Н. Черников сформулировал проблему в 1940 году: будет ли бесконечная группа с условием минимальности (в частности, локально - конечная группа [1]), черниковской? Под черниковской группой мы понимаем конечное расширение абелевой группы с условием минимальности [2, 3]. Тесным образом с проблемой Черникова связана проблема Шмидта: каковы все бесконечные группы, собственные подгруппы которой конечны [4]? Развитию положительной теории в направлении решения этих проблем в классе локально - конечных групп посвящено много работ. Пальма первенства и ведущая методологическая роль в решении проблемы Шмидта в классе локально - конечных групп принадлежит М.И. Каргаполову [5], а в решении проблемы Черникова - В.П. Шункову [6]. Дальнейшие исследования в этом направлении связаны с ослаблением условия минимальности для подгрупп и наложением его на отдельные типы подгрупп. Так В.П. Шунков в классической работе [6] решает проблему минимальности Черникова в классе локально - конечных групп, а так же усиливает этот результат в классе локально - конечных групп с условием минимальности для абелевых подгрупп [7]. Тем самым была установлена равносильность условия минимальности для подгрупп и условия минимальности для абелевых подгрупп в классе локально - конечных групп. Эти работы послужили примером и одним из основных источников для дальнейших обобщений уже в классе периодических групп с некоторыми ограничениями. Использование локального метода, возникшего в глубине исследований конечных групп, и расширенного

В.П. Шунковым и другими авторами на класс локально - конечных групп, позволило получить ряд замечательных результатов о локально - конечных группах. Этот метод системно представлен в монографии О. Кегеля и Б. Верфрица [8]. Центральное место в монографии занимает проблема Черникова для локально - конечных групп, базирующаяся на исследовании В.П. Шункова и других авторов.

Изучение локально - конечных групп, все собственные подгруппы которых имеют не более чем конечное число сопряженных элементов в этих подгруппах (FC-подгруппы), рассматривается как обобщение ситуации, возникающей в направлении исследования проблемы Черникова. Действительно, условие минимальности для подгрупп позволяет вести индуктивные рассуждения, в силу которых, если существует подгруппа $H$, удовлетворяющая условию минимальности для подгрупп, но не являющаяся черниковской группой, то в $H$ найдется такая нечерниковская подгруппа $K$, все собственные подгруппы которой будут уже черниковскими. Легко видеть (Лемма 3.2), что факторгруппа $K/Z(K)$, где $Z(K)$ - центр группы $K$, должна быть в этом случае простой группой. Таким образом, проблема минимальности в классе локально конечных групп сводится к вопросу: верно ли, что локально - конечная группа, все собственные подгруппы которой черниковские группы, будет не простой? Работы В.П.Шункова и других авторов показали, что это действительно так. Ответ на этот вопрос остается положительным, если требование быть черниковской группой, наложенное на все собственные подгруппы, заменить одним из:

1) все примарные подгруппы являются черниковскими;

2) все собственные подгруппы являются почти абелевыми.

Напомним, что *почти абелевой* группой называется группа, являющаяся конечным расширением абелевой группы [2]. Каждого в отдельности ограничения, отмеченного в 1) и 2), достаточно для положительного решения вопроса [11, 10, 12, 9, 13]. С точки зрения техники доказательства и развития метода целесообразно рассмотреть условие

3) все собственные подгруппы (почти) FC-группы.

В работе рассматриваются локально - конечные минимальные не (почти) FC-группы, т.е. локально - конечные не (почти) FC-группы, все собственные подгруппы которых являются (почти) FC-группами. Здесь уточняется и развивается понятие «сигма-эквивалентности», введенное В.В. Беляевым [14, 9]. Частные свойства соизмеримости двух подгрупп в некоторой группе неоднократно рассматривались в работах В.П.Шункова (в частности, в [15]). Общая ситуация и отношение индексной эквивалентности на элементах не локально конечной группы была опробована автором в [16, 17]. Там же было введено понятие модулятора элемента группы и необходимая символика.

## §1. Определения и базовые леммы

1.1 Определение. *Элемент* $b$ *сравним с элементом* $a$ $(a :\equiv b)$ *в группе* $G$, *если индекс* $|C(a) : C(a) \cap C(b)| < \infty$ *(конечен), т.е. верна формула*

$$(a :\equiv b) \Leftrightarrow (C(a) :\equiv C(b)).$$

1.2 Определение. *Элементы* $a$ *и* $b$ *индексно эквивалентны* $(a_{\mathrm{i}} \equiv b)$ *в группе* $G$, *если их централизаторы в G соизмеримы, т.е. верна формула*

$$(a_{\mathrm{i}} \equiv b) \Leftrightarrow (C(a) \equiv C(b)).$$

Бинарное отношение $'':\equiv''$ заданное на элементах произвольной группы G обладает свойствами:

1.2.1) если $(a :\equiv b)$ и $(a :\equiv c)$, $a,b,c \in G$, то $a :\equiv b$ ;

1.2.2) если $(a :\equiv b)$, $a,b \in G$, то $\varphi(a) :\equiv \varphi(b)$, где $\varphi$ - некоторый автоморфизм группы G.

Очевидно, из свойства (1.2.2) легко следует инвариантность сравнимости ($:\equiv$) элементов в группе G, а также индексной эквивалентности ($\equiv$) элементов, относительно действия автоморфизмов группы G.

1.3 Определение. *Модулятором элемента а группы* $G$ *в группе* $G$ *назовём множество* $M_G(a)$ *элементов группы* $G$ *такое, что для любого элемента* $x \in M_G(a)$ *x сравнимо с* $a$ $(a :\equiv x)$ *в группе* $G$, *т. е. верно равенство*

$$(M_G(a) = \{x / a :\equiv x,\ x \in G\} \cdot$$

Нетрудно видеть, что $M_G(a)$ – подгруппа группы G (свойство 1.2.1).

1.4 ЛЕММА. *Элементы а и b группы* $G$ *тогда и только тогда индексно эквивалентны* $(a_{\mathrm{i}} \equiv b)$ *в группе* $G$, *когда их модуляторы равны* $(M(a) = M(b)$, *т.е. справедлива формула*

$$(a_i \equiv b) \Leftrightarrow (M(a) = M(b)),$$

где $\Leftrightarrow$ эквиваленция соответствующих высказываний.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Если $(a_{\mathrm{i}} \equiv b)$, то $(a :\equiv b)$ и $(b :\equiv a)$. Отсюда следует, что $\forall x \in M(a)$, $x \equiv: a$, но $b :\equiv a :\equiv x$. Далее из транзитивности отношения $''\equiv:''$ следует, что $x \in M(b)$. Таким образом, $M(a) \le M(b)$. Аналогично устанавливается, что $M(b) \le M(a)$. Из этих соотношений следует $M(a) = M(b)$.

*Достаточность*. Пусть $M(a)=M(b)$. Отсюда следует, что $a\in M(b)$ $(b :\equiv a)$ и $b\in M(a)$, $(a :\equiv b)$. Из соотношений $(a :\equiv b)$ и $(b :\equiv a)$ следует $a_i \equiv b$.

Лемма доказана.

1.5 ЛЕММА. *Пусть G – бесконечная группа,* $x\in M(a)\setminus e$. *Если* $[a,x]\neq e$ *, то* $(\forall g\in G)(a^g\in M(a)), a_i\equiv a^g$ è $M(a)=M(a^g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $a\in M(a)$ и $M(a)$ – подгруппа $G$, то $(\forall g\in G)(a^g\in M(a)), a_i\equiv a^g$ *и* $M(a)=M(a^g)$. Очевидно, $a^x \equiv: a$. Так как $(C(a)^x = C(a^x))$ [20. с.69] и $C(a)\cong C(a^x)$, то из соотношения $a^x \equiv: a(\left|C(a):C(a)\cap C(a^x)\right|<\infty)$ следует, что подгруппа $Q=C(a)\cap C(a^x)$ имеет конечный индекс в $C(a^x)$. Отсюда, очевидно, следует $a\equiv: a^x$ и $a_i\equiv a^x$.

Так как $\left|a^G\right|=\left|G:C(a)\right|$ [2 (теорема 2.5.6)], то из $a^x{}_i\equiv a$ следует, что $\left|(a^x)^{C(a)}\right|<\infty$. Поскольку отношение „$_i\equiv$” инвариантно относительно действия внутренних автоморфизмов группы $G$ (свойство 1.2.2.), то верно сравнение $(\forall g\in G)(a^{xg}\equiv a^g)$. Отсюда следует, что $\left|C(a^{xg}):C(a^{xg})\cap C(a^g)\right|<\infty$ и $\left|C(a^g):C(a^g)\cap C(a^{xg})\right|<\infty$. Теперь нетрудно заметить, что $\left|\{(a^g)^{C(a^{g})}\}\right|<\infty$ и $\left|\{(a^g)^{C(a^{xg})}\}\right|<\infty$ для любого фиксированного g $\in$ G.

Из последнего соотношения следует, что $\left|\{a^{C(a^x)g}\}\right|<\infty$. Далее рассмотрим разложение группы $G$ на смежные классы $gC(a^x)=gC$ по подгруппе $C=C(a^a)$. Очевидно, произведение двух произвольных элементов, из которых первый взят со смежного класса aC, а второй – со смежного класса bC, принадлежит тому же классу, что и произведение ab. Элементы смежных классов aC и bC можно представить в виде ac и bs соответственно, где $c,s\in C$ а их произведение - $acbs$. Поскольку, $acbs\in abC$, то существует элемент $h\in C$ такой, что $acbs=abh$ и $csb=bh$, или $cb=bhs^{-1}$. Очевидно, $hs^{-1}=z\in C$ и $cb=bz$. Таким образом, каждый левый смежный класс $g_iC(a^x)$ группы G по подгруппе $C(a^x)$ содержится в некотором правом смежном классе $C(a^x)g_j$. Поскольку множество $\{a^{C(a^x)g}\}$ конечно, то, как легко видеть, множество $\{a^{gC(a^x)}\}$ так же конечно, где $g$ фиксировано. Отсюда следует, что

$a^g \equiv: a^x$. Поскольку $C(a^g) \cong C(a^x)$, то $a^g{}_i \equiv a^x$. Отсюда и сравнения $a^x{}_i \equiv a$ следует, что $a^g{}_i \equiv a$. По Лемме 1.4 $M(a) = M(a^g)$.

Лемма доказана.

## §2. Известные результаты, вспомогательные леммы и предложения

Мы используем в своих исследованиях ряд классических результатов В. П. Шункова, полученных им для описания локально - конечных и периодических групп [22]. Мы опираемся также на известную теорему Томпсона-Фейта [19] о разрешимости конечной группы нечетного порядка. Предложение 2.3 дает нам критерий, при каком условии почти FC-группа будет FC-группой. Для этого достаточно, чтобы в ней все неединичные элементы были индексно эквивалентны. Лемма 2.4 и Предложение 2.7 дают информацию о простой минимальной не почти FC-группе с индексно - эквивалентными неединичными элементами. Оказывается, в такой группе бесконечные собственные подгруппы соизмеримы и финитно-аппроксимируемы. В Предложении 2.5 продолжается изучение простой минимальной не почти FC-группы, с индексно - эквивалентными неединичными элементами и с бесконечным централизатором некоторого неединичного элемента. В такой группе любые две собственные бесконечные подгруппы порождают собственную подгруппу. В Лемме 2.20 продолжается изучение почти FC-группы, в которой собственные подгруппы FC-группы. Группа с такими условиями будет либо FC-группой, либо черниковской группой определенного типа. Предложение 2.21 утверждает, что не FC почти FC-группа, всякая собственная подгруппа которой FC-группа, есть черниковская группа отличная от своего коммутанта. Предложение 2.26 дает описание бесконечной FC-группы, все собственные подгруппы которой коммутативны. Такая группа сама коммутативна. Предложения 2.27 и 2.28 раскрывают элементарные свойства минимальных не почти FC-групп. В параграфе приведен ряд результатов из монографии [8] (2.12, 2.13, 2.15, 2.19), а также результаты С. Н. Черникова (2.14, 2.22). Основным результатом параграфа является Лемма 2.20, дающая описание почти FC-группы с собственными FC-подгруппами. В доказательстве этой леммы ярко демонстрируется значение для теории групп понятия модулятора элемента. Лемма 2.31 дает описание периодических групп с черниковским коммутантом. Они почти FC-группы.

2.1 (ТЕОРЕМА ТОМПСОНА-ФЕЙТА [19]). *Конечная группа нечетного порядка разрешима.*

2.2 (ТЕОРЕМА ШУНКОВА [20]). *Периодическая группа с почти регулярной инволюцией локально - конечна, почти разрешима и почти FC-группа [21].*

2.3 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $G$ -почти FC-группа с индексно - эквивалентными неединичными элементами. Тогда* $G = M_G(e)$ *и $G$ - FC-группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию группа $G$ обладает FC-подгруппой F конечного индекса. Так как $(\forall x \in F)(|G:C(x)| < \infty)$, то $\mathrm{F} \le \mathrm{M}_{\mathrm{G}}(\mathrm{e})$. Отсюда следует, что $|\mathrm{G}:\mathrm{M}(\mathrm{e})| < \infty$. Пусть $\mathrm{g} \in \mathrm{G} \setminus \mathrm{M}_{\mathrm{G}}(\mathrm{e})$, $\mathrm{a} \in \mathrm{M}(\mathrm{e}) \setminus \mathrm{e}$. По условию $\mathrm{g}_{\mathrm{i}} \equiv \mathrm{a}$, т.е. $|C(a):C(a) \cap C(g)| < \infty$, $|C(g):C(g) \cap C(a)| < \infty$. Так как $|G:C(a)| < \infty$ и $g \equiv: a$, то $|G:C(g)| < \infty$ и $\mathrm{a}_{\mathrm{i}} \equiv \mathrm{g}$. Таким образом, в группе $G$ один класс индексно эквивалентных элементов и $\mathrm{M}(\mathrm{e}) = \mathrm{G}$ - FC-группа.

Предложение доказано.

2.4 ЛЕММА. *Пусть $G$-простая минимальная не почти FC-группа с индексно - эквивалентными неединичными элементами. Тогда в группе $G$ бесконечные собственные подгруппы соизмеримы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A, B$ - бесконечные собственные подгруппы $G$. По Предложению 2.3 $A$ и $B$ - FC-группы. Пусть $\mathrm{a} \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{e}, \mathrm{b} \in \mathrm{B} \setminus \mathrm{e}$. Так как $a \equiv b$, то $C(a) \cap C(b) = C_{ab}$ имеет конечный индекс в $C(a)$ и $C(b)$. Очевидно, $|A:C_A(a)| < \infty$, $|B:C_B(b)| < \infty$. Поскольку $A$ и $B$ – бесконечны, то $C_A(a)$ и $C_B(b)$ также бесконечны. Нетрудно видеть, что $|C_B(b):C_B(b) \cap C_{ab}| < \infty$ и $|C_A(a):C_A(a) \cap C_{ab}| < \infty$. Отсюда следует, что $|B:B \cap C_{ab}| < \infty$ и $|A:A \cap C_{ab}| < \infty$. Подгруппа $M_1 = гр(C_G(a), C_G(b))$ собственная в $G$ (Предложение 2.5). Отсюда следует, что $M_1 = гр(C_A(a), C_B(b))$ собственная в $G$. Легко видеть, что индекс $|M_1 : M_1 \cap C_{ab}|$ конечен и $M_1 \cap C_{ab} \le C_A(a) \cap C_B(b)$, $|C_A(a):C_A(a) \cap C_B(b)| < \infty$, $|C_B(b):C_A(a) \cap C_B(b)| < \infty$ |. Так как $|B:C_B(b)| < \infty$, $|A:C_A(a)| < \infty$ и $C_B(b) \cap C_A(a) \le A \cap B$, то $|A:A \cap B| < \infty$ и $|B:A \cap B| < \infty$.

Лемма доказана.

2.5 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $G$-простая минимальная не почти FC-группа с бесконечным централизатором некоторого неединичного элемента и с индексно - эквивалентными неединичными элементами. Тогда бесконечные собственные подгруппы $A$ и $B$ группы $G$ порождают собственную подгруппу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в группе $G$ неединичные элементы индексно - эквивалентны и централизатор некоторого неединичного элемента бесконечен, то централизатор любого элемента группы $G$ бесконечен. По Предложению 2.3 подгруппы $A$ и $B$ – FC-группы. Рассмотрим группу $K = гр(A, g)$, где $\mathrm{g} \in \mathrm{G} \setminus \mathrm{e}$. Так как $A$ - FC-группа и в группе

$G$ неединичные элементы индексно эквивалентны, то $|A : A \cap C(g)| < \infty$. Пусть $A_1 \le C(g)$ нормальная подгруппа из $A$ конечного индекса в $A$. Очевидно, $гр(A, g) < N(A_1) < G$. Нетрудно видеть, что $|B : B \cap C(g)| < \infty$ и существует подгруппа $B_1 \lhd B$, $B_1 < C(g)$, $|B : B_1| < \infty$. Так как $C(g)$ почти FC-группа, то она обладает FC-подгруппой R конечного индекса. Нетрудно видеть, что $|B_1 : B_1 \cap R| < \infty$ и $|A_1 : A_1 \cap R| < \infty$. Очевидно $|B : B \cap R| < \infty$, $|A : A \cap R| < \infty$. Отсюда следует, что существуют конечные множества элементов $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ и $b_{n+1}, b_{n+2}, ..., b_m \in B$ такие, что $A \le гр(R, a_1, a_2, ..., a_n)$, $B \le гр(R, b_{n+1}, b_{n+2}, ..., b_m)$. Рассмотрим группу $H = гр(R, a_1, a_2, ..., a_n, b_{n+1}, b_{n+2}, ... b_m)$. Подгруппы $H_1 = гр(R_1, a_1)$, $H_2 = гр(H_1, a_2), ..., H_m = гр(H_{m-1}, b_m)$, по установленному ранее, собственные и $A, B \le H_m = H < G$.

Предложение доказано.

2.6 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Почти абелева FC-группа $G$ соизмерима со своим центром $Z(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R$ – абелева группа из $G$ конечного индекса в $G$ и $G = гр(R, a_1, a_2, ..., a_n)$. Так как $G$ - FC-группа, то $\forall a_i$ $|G : C(a_i)| < \infty$ ($i = 1, 2, ..., n$). Очевидно,

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} C(a_i) \bigcap R$$

имеет конечный индекс в $G$ и $B \le Z(G)$. Отсюда следует, что $|G : Z(G)| < \infty$ и $G_i \equiv Z(G)$.

Предложение доказано.

2.7 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $G$ - простая минимальная не почти FC-группа с индексно - эквивалентными неединичными элементами. Тогда в группе G собственные подгруппы финитно аппроксимируемы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M$ – собственная бесконечная подгруппа из $G$, $g \in G \setminus e$. Так как $M$ - FC-группа (2.3) и неединичные элементы индексно - эквивалентны в $G$, то $|M : M \cap C(g)| < \infty$. Отсюда следует, что $|M : M \cap M^g| < \infty$. Так как группа $G$ простая, то

$$\bigcap_{g=G} M \bigcap M^g = \bigcap_{g=G} M^g = e.$$

Предложение доказано.

2.8 ([22] В.П. Шунков). *Группа тогда и только тогда является черниковской 2-группой, когда она 2-группа и в ней некоторая максимальная элементарная абелева подгруппа конечна.*

2.9 ОПРЕДЕЛЕНИЕ [8]. *Пусть $G$ –группа, p – простое число. Тогда подгруппа P называется силовской p-подгруппой группы $G$, если она является максимальной p-подгруппой группы $G$ и содержит изоморфную копию каждой p-подгруппы группы $G$.*

Пусть $Syl_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп группы $G$, а $Max_p(G)$ – множество всех максимальных p-подгрупп группы $G$. Очевидно, $Syl_p(G) \le Max_p(G)$. Если все максимальные p-подгруппы группы $G$ изоморфны, то все они являются силовскими p-подгруппами. Таким образом, силовские p-подгруппы конечной группы являются в точности ее максимальными p-подгруппами.

2.10 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если локально - конечная группа G содержит конечную максимальную p-подгруппу P, то все максимальные p-подгруппы группы $G$ сопряжены в $G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q$ – произвольная конечная p-подгруппа группы $G$. Так как $G$ – локально - конечная группа, то $K = гр(Q, P)$ – конечна. По теореме Силова [2], применительно к конечной группе К, $P = K^{-1}QK \le P$. Таким образом, каждая p-подгруппа группы $G$ конечна. Если же Q является максимальной p-подгруппой группы $G$, то $P$ и $Q$ сопряжены.

Предложение доказано.

2.11 ОПРЕДЕЛЕНИЕ [18]. *Пусть $G$ – группа, H – ее собственная подгруппа, содержащая инволюции. Подгруппа H называется сильно вложенной в $G$, если пересечение $H \cap H^g$ $(g \in G \setminus H)$ не содержит инволюций.*

2.12 (ТЕОРЕМА 4.24 [8]). *Если локально - конечная группа $G$ обладает сильно вложенной подгруппой H, то справедливо одно из следующих утверждений*:

1)конечные 2-подгруппы группы $G$ циклические или (обобщенные) группы кватернионов;

2) $O(G)=\bigcap_{g\in G} H^g$ и факторгруппа $G/O(G)$ имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $M/O(G)$, которая изоморфна одной из групп PSL(2,F), PSU(3,F) или Sz(F) для подходящего локально - конечного поля характеристики 2 и G/M – абелева группа, все элементы которой имеют нечетные порядки.

2.13 (ТЕОРЕМА 4.30 [8]). *Пусть* $G$ *– бесконечная локально - конечная простая группа с конечной силовской 2-подгруппой S. Если для каждой инволюции* $i\in S$ *факторгруппа* $C(i)/O(C(i)$ *конечна, то для каждой пары* $s,t$ *инволюций из S, таких, что* $s^a,t^b,x^c\in S$, $s^a\cdot t^b=x^c$ *и порядок* $\left|C_S(x^c)\right|$ *максимален среди порядков централизаторов в S элементов из S сопряженных с* $x$ *в* $G$. *Центр группы S – элементарная абелева группа*.

2.14 (С.Н.Черников [3]). *Бесконечная почти локально - разрешимая группа, обладающая конечной силовской p-подгруппой, обладает подгруппой конечного индекса, не содержащей p-элементов.*

2.15 (ТЕОРЕМА 4.4 [8]). *Бесконечная группа* $G$ *проста тогда и только тогда, когда она обладает локальной системой состоящей из счетных бесконечных простых подгрупп.*

2.16 (ТЕОРЕМА ШМИДТА [2]). *Расширение локально - конечной группы при помощи локально - конечной группы локально - конечно*.

2.17 (Ю.К. Горчаков [23]). *Если в FC-группе коммутант подгруппы конечного индекса конечен, то коммутант самой группы конечен.*

2.18 ОПРЕДЕЛЕНИЕ [8]. *Группой Фробениуса называется группа* $G$, *которая содержит подгруппу H такую, что H<G и* $(\forall \mathrm{g}\in \mathrm{G}\setminus \mathrm{H})(H\cap H^g=\mathrm{e})$. *Подгруппу H группы Фробениуса* $G$ *называют дополнением (Фробениуса) группы* $G$.

2.19 (ТЕОРЕМА 1.V.2 [8]). *Пусть H – дополнение локально - конечной группы Фробениуса. Тогда G содержит единственное ядро*

$$\mathrm{K}=(\mathrm{G}\setminus \bigcup_{\mathrm{g}\in \mathrm{G}} \mathrm{H}^{\mathrm{g}})\bigcup <e>$$

и $K$ является нормальным делителем группы $G$. Подгруппа К нильпотентна и существует множество простых чисел π такое, что $G$ - π - замкнута и $K=O_{\mathrm{p}}(G)$. Любое дополнение группы $G$ сопряжено с $H$

элементом из $K$. Любая абелева группа из H локально-циклическая. Если $S$ – нетривиальная подгруппа из $G$, такая, что $K \cap S = e$, то $Z(S) \neq e$ и $S$ сопряжена с подгруппой дополнения $H$.

2.20 ЛЕММА. *Почти FC-группа $G$, в которой собственные подгруппы FC-группы, либо FC-группа, либо черниковская группа вида $G = A \quad \lambda <a>$, где A – квазициклическая примарная группа, <a> - конечная циклическая примарная группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что группа $G$ не является FC-группой. Пусть $H$ – ее подгруппа конечного индекса, $M(g)$ – модулятор произвольного элемента $g \in G$.

Если $(\forall g \in G)( M(g) = G)$, то $G$ - FC-группа (2.3). Противоречие. Таким образом, в группе $G$ существует элемент $a \neq e$ такой, что $M(a) < G$ (собственная подгруппа).

Если предположить что $|C(a)| < \infty$, то $M(a) = G$. Противоречие. Таким образом, $C(a)$ – бесконечная группа. Поскольку $|G : H| < \infty$, то $|C(a) : C(a) \cap H| < \infty$. Отсюда следует, что $C(a) \cap H$ – бесконечная группа. Так как $H$ – собственная FC-группа, то $(\forall h \in H)( |G : C(h)| < \infty)$. Отсюда следует, что $M(a)$ – бесконечная группа. Так как

$$M(e) = \bigcap_{g \in G} M(g) = FC(G),$$

то, очевидно, $M(e) < G$, $H \leq M(e)$, $|G : M(e)| < \infty$. Отсюда имеем, $|G : C(a)| < \infty$ и $M(a) \leq M(e)$. С другой стороны $M(e) \leq M(a)$. Таким образом, $M(a) = M(e) = FC(G)$.

Так как $G$ не FC-группа, а $|G : M(e)| < \infty$, то существует элемент $x \in G \setminus M(e)$. Предположим, что $M(x) < G$. Тогда $M(x)$ - FC-группа и $M(e) = M(a) \leq M(x)$, $a \in M(x)$. А так как $C(x)$ в этом случае бесконечен, то $|C(x) : (x) \cap M(e)| < \infty$ и $M(e) \leq M(x)$. Отсюда следует, что $x \in M(e)$. Противоречие. Таким образом, $M(x) = G$.

Предположим, что $M(x) < G$. Тогда $M(x)$ - FC-группа и $M(1) = M(a) \leq M(x)$, $a \in M(x)$. А так как $C(x)$ в этом случае бесконечен, то $\left|C(x):(x)\cap M(e)\right|<\infty$ и $M(e)\le M(x)$. Отсюда следует, что $x\in M(e)$. Противоречие. Таким образом, $M(x)=G$.

Предположим, что $C(x)$ – бесконечная группа. Если $C(x)=G$, то $x\in M(e)$. Противоречие. Отсюда следует, что $C(x)<G$ и $C(x)$ – FC-группа. Так как $\left|C(x):(x)\cap M(e)\right|<\infty$, то существует элемент $h\in C(x)\cap M(e)\setminus e$ такой, что $\left|C(x):(x)\cap C(h)\right|<\infty$. Очевидно, $x\in C(h)$, а $C(h)$ – бесконечная FC-группа. Отсюда следует, что $\left|C(h):(h)\cap C(x)\right|<\infty$ и $x\equiv: h$, $x:\equiv h$. Таким образом, $h_i\equiv x$, а так как $\left|G:C(h)\right|<\infty$, то $\left|G:C(x)\right|<\infty$ и $x\in M(e)$. Противоречие. Итак, $\left|C(x)\right|<\infty$.

Докажем, что $M(e)$ – абелева группа. Пусть $h\in M(e)\setminus e$, $C=C(h)$. Очевидно, $\left|G:C(h)\right|<\infty$. Так как $M_C(e)$ характеристическая подгруппа группы $C$ и $C\nabla G$, то $M_C(e)\nabla G$ и $K=$ ð $(M_C(e), x)$ бесконечна. Очевидно, $K$ собственной в $G$ быть не может. Отсюда следует, что $M_G(e)\le M_C(e)=C=C(h)$. Поскольку $h$ – произвольный элемент из $M(e)$, то $M=M(e)$ абелева группа. Докажем, что группа $M$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Предположим, что группа $M$ обладает собственной бесконечной подгруппой $A$. Так как $A\nabla M$, а $\left|G:M\right|<\infty$, то $\left|G:N(A)\right|<\infty$. Отсюда следует, что для любых $g\in G$

$$\bigcap_{g\in G} A^g = A_1 < M$$

и $A_1\nabla G$. Рассмотрим группу $K=гр(A_1,x)$, где $x\in G\setminus M$. Предположим, что $K<G$. Тогда, очевидно, $K$ – FC-группа, т. е. $C(x)$ – бесконечная группа. Противоречие. Таким образом, $K=G$. Но тогда $M(e)\le A_1$, т.е. $M\le A_1\le A$. Однако, это противоречит выбору группы $A$ (как собственной в $M$).

Поскольку $\left|G:M\right|<\infty$, то группа $G$ является конечным расширением абелевой группы $M$ с условием минимальности. Отсюда следует, что группа $G$ – черниковская группа и $M$ не содержит бесконечных собственных подгрупп. В этом случае $M$ – квазициклическая группа (Предложение 1.3 [3]). Очевидно, $M$ – максимальная примарная нормальная подгруппа из $G$ и $G=M\leftthreetimes <x>$, где $<x>$ – циклическая группа простого порядка.

Лемма доказана.

2.21 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Не FC – почти FC-группа $G$, всякая собственная подгруппа которой FC-группа, – черниковская группа отличная от своего коммутанта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, очевидно, следует из Леммы 2.20 и очевидного равенства $G' = C_{p^\infty}$. Если же $|G'| < \infty$, то $G$ – FC-группа, чего быть не может.

2.22 (С.Н.Черников [3]). *Класс черниковских групп замкнут относительно подгрупп гомоморфных образов и расширений.*

2.23 *Периодическое расширение локально разрешимой группы посредством локально разрешимой группы локально разрешимо [18].*

2.24 (В.П.Шунков [24]) .*Пусть $G$ – локально конечная группа, $K \lhd G$, Р – конечная р-подгруппа из $G$ ($P \notin \pi(K)$), G=G/К, Р=РК/К. Тогда $N_G(P)=N_G(P)K/K$, $C_G(P)=C_G(P)K/K$.*

2.25 (Н.Ф. Сесекин, О.С. Широковская [25]). *Бесконечная локально - разрешимая группа, все собственные подгруппы которой коммутативны, сама коммутативна.*

2.26 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Бесконечная FC-группа, все собственные подгруппы которой коммутативны, сама коммутативна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа $G$ обладает бесконечной системой порождающих. Если группа $G$ не содержит элементов конечного порядка, то она абелева. Пусть $P(G)$ – периодическая часть $G$. Очевидно, коммутант $G' \le P(G)$, а $G/P(G)$ – абелева. Так как периодическая FC-группа локально - конечна, то $P(G)$ – локально разрешима и, следовательно (2.25), абелева. Очевидно, $G$ разрешима и, следовательно, локально - разрешима. По предложению 2.25 в этом случае $G$ абелева.

Если же группа $G$ конечно-порождена, то $(\forall a \in G)(|G : C(a)| < \infty)$ и $G$ - почти абелева FC-группа. В этом случае $|G : Z(G)| < \infty$ (2.6) и $|G'| < \infty$. Так как $G/G'$ - абелева, то $G$ – локально - разрешима и по предложению 2.25 $G$ – абелева.

Предложение доказано.

2.27 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $G$ – минимальная не почти FC-группа. Тогда группа $G$ не обладает собственными подгруппами конечного индекса и $M = M_G(1) \le Z(G)$. Если $N/K$ конечный нормальный делитель факторгруппы $G/K$, то $N/K \le Z(G/K)$ и N' - FC-группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, очевидно, вытекает из свойств минимальных не почти FC-групп и того факта, что, если $N/K$ абелева, то $N' \le K$, где $K$ - FC-группа.

2.28 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $G$ не обладает подгруппами конечного индекса и $M = M_G(e) = FC(G) \le Z(G)$. Если $N/K$ – конечный нормальный делитель факторгруппы $G/K$, то N/K≤Z(G/K) и N не более чем трехступенно разрешима, а $K$ не более чем двухступенно нильпотентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $K = FC(N)$, то $K \triangleleft G$ и, так как $N$ – почти абелева и $N/K \le Z(G/K)$, то $N' \le K$. Очевидно, $K$ – почти абелева FC-группа и по Предложению 2.6 она конечна над своим центром и, следовательно, коммутант $K'$ - конечен. По Предложению 2.27 $K' \le Z(G)$. Таким образом, N‴=e, а $[G,N] \le K$ и $K$ не более чем двухступенно нильпотентна.

Предложение доказано.

2.29 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $G$ – группа, Z≤Z(G). Если факторгруппа $G/Z$ – FC-группа, то $G$ – FC-группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

2.30 ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $G$ – группа, Z≤Z(G). Если в факторгруппе $G/Z$ коммутант конечен, то группа $G$ является FC-группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как группа с конечным коммутантом является FC-группой (1.11 [14]), то утверждение доказываемого предложения следует из предыдущего предложения.

Предложение доказано.

2.31 ЛЕММА. *Пусть $G$ – периодическая группа, $\mathrm{G}'$ - ее коммутант. Если коммутант $\mathrm{G}'$ группы $G$ черниковский, то $G$ – почти FC-группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a$ – фиксированный элемент группы $G$. Тогда $\forall g \in G$ верно равенство $g^{-1}ag = a[a,g]$. Так как $\left|a^G\right| = \left|G : C(a)\right|$, а элемент $[a,g]$ принадлежит коммутанту $\mathrm{G}'$, то верно соотношение

$$\left|\mathrm{a}^{\mathrm{G}}\right| = \left|\mathrm{G} : \mathrm{C(a)}\right| \le \left|\mathrm{G}'\right|.$$

Если $|G'|$ конечен, то группа $G$ является FC-группой. Пусть $\mathrm{G}'$ - бесконечная черниковская группа, а $Z$ – ее черниковская полная часть. Так как $Z \triangleleft G$ и $\left|G : C(Z)\right| < \infty$ [1], то для доказательства леммы достаточно установить, что $C(Z)$ – почти FC-группа. Очевидно, в факторгруппе $C(Z)/Z$ коммутант конечен и она является FC-группой. Отсюда по предложению 2.30 $C(Z)$ – FC-группа, а $G$ – почти FC-группа.

Лемма доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Черников С.Н. Условия конечности в общей теории групп // УМН-1959, 14, №5. С.45-96.
2. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.Н. Основы теории групп // М.: Наука, 1982. 384с.
3. Черников С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп // М.: Наука, 1980. 384с.
4. Черников С.Н. О проблеме Шмидта // Укр. матем. ж. – 1971, 23, №5. С. 598 – 603.
5. Каргаполов М.И. О проблеме О.Ю. Шмидта // Сиб. матем. ж. -№4, 1963. С.233-235.
6. Шунков В.П. О проблеме минимальности для локально - конечных групп // Алгебра и логика – 1970. 9. №2. С.220-248
7. Шунков В.П. О локально - конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика – 1970. 9. №5. С.579–615.
8. Kegel O.H., Werhfritz B.A. Lokally finite groups // Amsterdam-London. 1973 y., 210p.
9. Беляев В.В. Локально - конечные группы, все собственные подгруппы которых почти абелевы // Сибирский матем. ж., №3, 1983г. С.11-17.
10. Беляев В.В. Локально - конечные группы с черниковскими р-подгруппами // Алгебра и логика 1981. 20. №6. С.605–619.
11. Павлюк И.И. Шунков В.П. О локально – конечных группах с условием min – p по всем p // Тезисы докладов VII Всесоюзного симпозиума по теории групп. Красноярск – 1980. С.84–85.
12. Черников Н.С. О бесконечных простых локально - конечных группах // Препринт АН УССР 37. №82. Киев, - 1982. 20с.
13. Bruno B. On Groups with “Abelin by Finite ” proper Subgroups // Bolletino U.M.I. – 1984. 6. 3–13. P.197–225.
14. Беляев В.В. Группы типа Миллера-Морено // Сибирский Матем. ж.: №3, 1978г. С.509-514.
15. Шунков В.П. Локально - конечные группы конечного ранга // Алгебра и логика – 1971.10, №2. С.199–225.
16. Павлюк И.И. О сопряженно бипримитивно конечных группах с индексно - сравнимыми подгруппами // В кн. «Исследования по алгебраической теории чисел и конструктивной алгебре» - Алма-Ата. 1988. С. 39-47.

17. Павлюк И.И. О бинарно конечных группах с черниковскими силовскими подгруппами // В кн. VIII Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы докладов. – Киев. 1982.-92с.

18. Курош А.Г. Теория групп // М. Наука. 1967. 648с.

19. Feit W., Tompson J.G. Solvability of groups of odd order // Pacif. J. Math. – 1963. 13. №3. P.775-1029.

20. Шунков В.П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика – 1972. 11. №4.-С.470–493.

21. Беляев В.В. Группы с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 26, №5, 1987.-С.531-535.

22. Шунков В.П. $M_p$–группы // М.: Наука, 1990.-150с.

23. Горчаков Ю.М. Группы с конечными классами сопряженных элементов – М.: Наука, 1978.-120с.

24. Шунков В.П. Об абстрактных характеризациях некоторых линейных групп // В книге «Алгебра. Матрицы и матричные группы». Красноярск, 1970.-С.3-54.

25. Шунков В.П. Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970, №4.-С.484-496.

***Түйіндеме***

*Бұл жұмыста локальдық – ақырлы топтар класындағы Черников проблемасының жаңа шешімі келтірілген.*

***Resume***

*In this work the new decision of problem of Tchernikov in a classe the locally – finite groups is resulted.*

УДК 512.544.27

# ЛОКАЛЬНО-КОНЕЧНЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ НЕ FC – ГРУППЫ И ПРОБЛЕМА МИНИМАЛЬНОСТИ В КЛАССЕ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ГРУПП ЧАСТЬ 2

***И.И. Павлюк***

**Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова**

В этой части приведено новое доказательство решения проблемы минимальности в классе локально-конечных групп.