УДК 539.3:534.2

СВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Н.А. Испулов, А.К. Сейтханова
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

1 Матричная формулировка задач распространения термоупругих волн

Распространение термоупругих волн в анизотропных средах описывается уравнениями движения, решаемых совместно с уравнением теплопроводности Фурье и уравнением притока тепла, которые имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{U}_i \tag{1}$$

$$\lambda_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = -q_i \tag{2}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = -i\omega \beta_{ij} \varepsilon_{ij} - i\omega \frac{c_\varepsilon}{T_0} \theta \tag{3}$$

где σ_{ij} - тензор напряжения, ρ-плотность среды, λ_{ij} - тензор теплопроводности, q_i - вектор притока тепла, ω - круговая частота, β_{ij} - термомеханические постоянные $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, ε_{ij}- тензор деформации, c_ε - теплоемкость при постоянной деформации, θ=T-T0 - приращение температуры по сравнению с температурой естественного состояния T0, $\left|\frac{\theta}{T_0}\right| \prec\prec 1$ для малых деформаций.

Физико-механические величины связаны соотношением Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\theta \tag{4}$$

Здесь c_{ij} - упругие параметры, cijkl=cjikl=cijlk=cklij; e_{kl} - тензор малых деформаций Коши.

Уравнения (1)-(4) определяют взаимосвязь механических напряжений и температуры как функции независимых переменных – теплового поля и деформации.

Таким образом, соотношения (1)-(4) составляют замкнутую систему уравнений термоупругости, которая описывает распространение термоупругих волн.

На основе метода разделения переменных в случае гармонической зависимости от времени:

$$\left[U_i(x,y,z,t);\ \sigma_{ij}(x,y,z,t);\theta;\ q_z\right]=\left[U_i(z),\sigma_{ij}(z),\theta;\ q_z\right]e^{i(\omega t-mx-ny)} \quad (5)$$

Система уравнений (1)-(4) приводится к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами, описывающей распространение гармонических волн:

$$\frac{d\vec{W}}{dz}=B\vec{W} \quad (6)$$

Здесь $B=B\left[c_{ijkl}(z),\beta_{ij}(z),\omega,m,n\right]$ - матрица коэффициентов, элементы которой содержат в себе параметры среды, в которой распространяются термоупругие волны; m,n-компоненты волнового вектора $\tilde{\kappa}$.

Вектор $\vec{W}$ имеет вид:

$$\vec{W}(x,y,z,t)=\left[u_z(z),\sigma_{zz},u_x(z),\sigma_{xz},u_y(z),\sigma_{yz},\theta,q_z\right]^t\exp(i\omega t-imx-iny) \quad (7)$$

Символ t означает операцию транспонирования вектора - строки в вектор – столбец.

Неоднородность среды предполагается вдоль оси Z. При построении матрицы коэффициентов B используется представление решения в виде (5), из системы уравнений (1)-(4) выделяются производные по Z и исключаются компоненты тензора напряжения не входящие в граничные условия. Множитель $\exp(i\omega t-imx-iny)$ всюду опущен.

Структуры матрицы B и вектор – столбец граничных условий в объемном случае для ромбической и гексагональной сингонии в случае оси симметрии второго порядка и неоднородности вдоль оси Z:

$$B=\begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & b_{47} & 0 \\ b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 \\ 0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & b_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & -i\omega b_{47} & 0 & -i\omega b_{67} & 0 & b_{87} & 0 \end{bmatrix};\ \vec{W}=\begin{pmatrix} u_z \\ \sigma_{zz} \\ u_x \\ \sigma_{xz} \\ u_y \\ \sigma_{yz} \\ \theta \\ q_z \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Из структуры матрицы коэффициентов (8) следует, что в пространственном случае упругие волны различной поляризации и тепловая волна взаимосвязаны.

Отличные от нуля элементы матрицы B b13 , b24 определяют взаимную трансформацию продольной и поперечной X - поляризованной волн. Элементы b15, b26 описывают взаимосвязь поперечной Y-поляризации с продольной волной. Отличный от нуля элемент b45 определяет взаимную трансформацию между волнами поперечной поляризации.

Отличие от нуля коэффициента b17:

$$b_{17}=\frac{\beta_{33}}{c_{33}}$$

означает, что продольная волна распространяется с термоупругим эффектом.

Не нулевые элементы b47 и b67:

$$b_{47}=\left(\frac{c_{13}}{c_{33}}\beta_{33}-\beta_{11}\right)im \quad b_{67}=\left(\frac{c_{23}}{c_{33}}\beta_{33}-\beta_{22}\right)in$$

означают влияние на упругие волны поперечных поляризаций термоупругого эффекта. При этом b47 описывает влияние термоупругого эффекта на упругую поперечную волну X- поляризации, а b67 влияние термоупругого эффекта на поперечную волну Y- поляризации.

Аналогично, для термоупругих волн, распространяющихся в анизотропной среде кубической сингонии построена матрица коэффициентов в объемном случае и проведен анализ матриц коэффициентов. Также получены структуры матриц коэффициентов при распространении термоупругих волн в анизотропных средах ромбической и гексагональной и кубической сингоний в плоскости XZ и YZ, определены типы волн и взаимная трансформация волн различной поляризации.

2 Структура матриканта

Построение структуры матриканта основано на его представлении в форме экспоненциального матричного ряда

$$T = E + \int_0^z B dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_1) B(z_2) dz_1 dz_2 + \ldots \quad (9)$$

И аналогичном представлении обратного матриканта Т-1

$$T^{-1} = E - \int_0^z B dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_2) B(z_1) dz_1 dz_2 - \ldots \quad (10)$$

Оба ряда абсолютно и равномерно сходятся на любом конечном интервале, в котором элементы матрицы B(z) непрерывны.

При этом справедливо соотношение:

$$TT^{-1}=T^{-1}T=E \quad (11)$$

Построение структуры матриканта есть установление зависимости между элементами прямой и обратной матриц T и T^{-1} на основе поэлементного их сравнения.

Бесконечные матричные ряды можно представить в виде

$$T = T_ч + T_{нч},\ T^{-1} = T_ч^{-1} - T_{нч}^{-1} \quad (12)$$

где T□ч,нч – сумма четных и нечетных рядов (9) и (10).

Методом математической индукции доказывается, что структура T -1(2n) и T -1(2n+1) сохраняется при любом n.

Структура матриканта, в случае распространения термоупругих волн в кубической, гексагональной и ромбической сингоний в объемном случае, определена в виде:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{42} & t_{32} & -t_{62} & t_{52} & -t_{82} & t_{72} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{41} & -t_{31} & t_{61} & -t_{51} & t_{81} & -t_{71} \\ -t_{24} & t_{14} & t_{44} & -t_{34} & t_{64} & -t_{54} & t_{84} & -t_{74} \\ t_{23} & -t_{13} & -t_{43} & t_{33} & -t_{63} & t_{53} & -t_{83} & t_{73} \\ -t_{26} & t_{16} & t_{46} & -t_{36} & t_{66} & -t_{56} & t_{86} & -t_{76} \\ t_{25} & -t_{15} & -t_{45} & t_{35} & -t_{65} & t_{55} & -t_{85} & t_{75} \\ -t_{28} & t_{18} & t_{48} & -t_{38} & t_{68} & -t_{58} & t_{88} & -t_{78} \\ t_{27} & -t_{17} & -t_{47} & t_{37} & -t_{67} & t_{57} & -t_{87} & -t_{77} \end{pmatrix} \quad (13)$$

элементы t_{ij} матриканта T^{-1} являются элементами прямого матриканта T.

Получены структура матриканта при распространении термоупругих волн в данных классах в плоскости XZ, в плоскости YZ.

В одномерном случае (распространение волн вдоль оси Z, m=0, n=0) структура (13) примет вид:

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{82} & t_{72} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{81} & -t_{71} \\ -t_{28} & t_{18} & t_{88} & -t_{78} \\ t_{27} & -t_{17} & -t_{87} & t_{77} \end{pmatrix};$$

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} t_{44} & -t_{34} \\ -t_{43} & t_{33} \end{pmatrix};$$

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} t_{66} & -t_{56} \\ -t_{65} & t_{55} \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Построение структуры матриканта, в данном случае, есть установление зависимости между элементами прямой и обратной матриц T и T-1 на основе поэлементного их сравнения.

Разложение структуры (8x8) матрицы (13) на матрицу (4x4) и две матрицы (2x2) означает независимость распространения упругой продольной волны с термоэффектом и упругих поперечных волн. В то же время на упругие поперечные волны, при одномерном распространении в анизотропных средах кубической, гексагональной и ромбической сингоний, вдоль оси симметрии четного порядка, также распространяются без термоупругого эффекта.

3 Уравнения дисперсии для упругих и термоупругих анизотропных сред

Основной характеристикой, определяющей закономерности волновых процессов в неограниченных периодических структурах, являются уравнения дисперсии. Дисперсионные соотношения представляют собой зависимости $\nu=\nu(\omega)$, $\kappa=\kappa(\omega)$, $\omega=\omega(\kappa)$, $\omega=\omega(\nu)$. Где ν- скорость, ω - циклическая частота, k - волновой вектор. В частном случае мы получаем зависимость $\kappa=\kappa(\omega)$. Полученная выше структура матриканта позволяет модифицировать условие существования нетривиальных решений и в два раза понизить степень характеристического уравнения.

На основе модифицированной формы условия существования нетривиальных решений:

$$\det[\widehat{\ } p-E\cos\widetilde{k}h]=0 \qquad (15)$$

где

$$p=\frac{1}{2}[T+T^{-1}] \qquad (16)$$

получены уравнения дисперсии термоупругих волн, распространяющихся в анизотропных средах кубической, гексагональной и ромбической сингоний в объемном случае, имеющие следующий вид:

$$\cos\tilde{k}_1 h = -\frac{a}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}}\right) -$$

$$\frac{1}{5}\left(\sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} + \frac{5\left(a^3 - 4ba + 8c\right)}{3\sqrt[3]{\gamma}} + 3a^2 - 8b}\right)$$

$$\cos\tilde{k}_2 h = -\frac{a}{4} - \frac{1}{4}\left(\sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}}\right) +$$

$$+\frac{1}{5}\left(\sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} + \frac{5\left(a^3 - 4ba + 8c\right)}{3\sqrt[3]{\gamma}} + 3a^2 - 8b}\right)$$

$$\cos\tilde{k}_3 h = -\frac{a}{4} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}}\right) -$$

$$-\frac{1}{5}\left(\sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} + \frac{5\left(a^3 - 4ba + 8c\right)}{3\sqrt[3]{\gamma}} + 3a^2 - 8b}\right)$$

$$\cos\tilde{k}_4 h = -\frac{a}{4} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}}\right) +$$

$$+\frac{1}{5}\left(\sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} - \frac{5\left(a^3 - 4ba + 8c\right)}{3\sqrt[3]{\gamma}} + 3a^2 - 8b}\right)$$

где

$$\gamma = \sqrt[3]{2b^3 - 9\left(ac + 8d\right)b + 27(c^2 + a^2 d) + \sqrt{(2b^3 - 9(ac + 8d)b + 27(da^2 + c^2))^2 - 4\left(b^2 - 3ac + 12d\right)^3}}$$

a,b,c – элементы матрицы (16)

Данные уравнения дисперсии получены с помощью математического пакета Mathematic 4.0.

Знание матрицы монодромии (матрицант одного периода неоднородности) позволяет в аналитической форме получить представление матрицанта произвольного периодически неоднородного слоя.

При наличии n периодов последовательность уравнений

$$\vec{u}_1 = T\vec{u}_0, \vec{u}_2 = T\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n = T\vec{u}_{n-1} \qquad (17)$$

приводит к уравнению

$$\vec{u}_n = T^n \vec{u}_0 \qquad (18)$$

Таким образом, вычисление матрицанта периодически неоднородного слоя, имеющего n периодов, связано с вычислением n – ой степени матрицы монодромии.

Введение важной для регулярных структур матрицы p (16) дает рекуррентное соотношение:

$$T^2 = 2pT - E \qquad (19)$$

Последовательное применение (19) позволяет представить Tn в виде:

$$T^n = P_n(p)T - P_{n-1}(p) \qquad (20)$$

где Pn(p) – матричные полиномы Чебышева – Гегенбауэра.

Получены уравнения дисперсии упругих волн в однородных анизотропных слоях при различных граничных условиях: уравнение дисперсии упругих волн в анизотропном слое ромбической сингонии при жестком закреплении границ; уравнение дисперсии упругих волн в анизотропном слое в случае свободных границ и в случае свободно-жестких границ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тлеукенов С.К. Метод матрицанта. Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004.- 148 с.

2. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1986.- 556 с.

3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука,1988.- 552 с.

4. Тлеукенов С. К., Орынбасаров К. А. О матрицах фундаментальных решений уравнений динамики неоднородных анизотропных сред. Изв. АН Каз ССР, сер. физ.-мат.,1991, N 5.- С. 87-91.

Түйіндеме

Термомеханикалық эффектімен болатын серпімді орталарда толқындық процестердің заңдылықтарды зерттеу актуалдығы, *геофизика, сейсмология, композиттік материалдардың механикасының теориялық және қолданбалы есептерді шешуінде қажеттілігімен байланысты. Байланысқан қозғалыс теңдеулері мен жылуөткізгіштік теңдеулері физика–механикалық параметрлердің күрделігі мен көп болуымен ерекшеленеді. Осыған байланысты деформацияланатын қатты дене механикасының – термосерпімділік деген тарауы қарқынды дамып келеді. Осы бағыттың аясында анизотропты орталардың кейбір физика–механикалық қасиеттерін қолдана отырып, байланысқан жылулық және механикалық өрістер зерттеледі.*

Resume

The urgency of research of laws of wave processes in elastic environments with thermo mechanical effect is connected with necessity of the decision of theoretical and applied problems of geophysics, seismology, mechanics of composite materials etc. Connected equations of movement and the heat conductivity equation differ complexity and an abundance of physical–mechanical parameters. In this connection the section of mechanics of a deformable firm body, - thermo elasticity intensively develops. Within the limits of this direction, leaning against use of certain physical–mechanical properties anisotropic environments, the connected thermal and mechanical fields are studied.

УДК 534.2:537.2

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПЬЕЗОКРИСТАЛЛАХ

С.К. Тлеукенов

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

При рассмотрении макроскопических свойств кристаллов, можно отвлечься от их дискретного микропериодического строения. При этом кристалл выступает как сплошная однородная анизотропная среда. В самом деле, рассматривая макроскопические свойства кристаллов, мы имеем дело с расстояниями, существенно большими, чем наибольший из периодов кристаллической решетки, и с объемами, гораздо большими, чем объем ячейки. Поэтому можно рассматривать кристалл как сплошную (непрерывную) среду. Следует помнить, что кристалл можно рассматривать как сплошную однородную среду лишь с некоторой точностью, так как реальный пьезоэлектрический кристалл