УДК 534.2:537.2

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПЬЕЗОКРИСТАЛЛАХ РОМБИЧЕСКОЙ СИНГОНИИ 222

А.Б. Белялова
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

В данной статье рассматриваются закономерности распространения электроупругих волн в пьезокристаллах ромбической сингонии класса 222. Для изучения используется теоретический метод, основанный на построении структуры матрицанта полной системы уравнений Максвелла и уравнений движения для анизотропных диэлектрических сред. Метод матрицанта позволяет качественно изучать процессы распространения гармонических электроупругих волн в анизотропных средах всех классов [1,2,3].

Система уравнений Максвелла при равенстве нулю объемной плотности зарядов ρ и вектора плотности токов j запишем следующим образом:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \qquad (1)$$

$$div\vec{B} = 0;$$

$$div\vec{D} = 0$$

Уравнениями движения упругой анизотропной среды имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (2)$$

Компоненты электрической и магнитной индукции выражаются в следующим виде:

$$D_i = e_{ikl}\varepsilon_{kl} + э_{ik}E_k, \qquad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \tag{3}$$

где e_{ikl} - пьезоэлектрические постоянные, связывающие электрическое поле с механическими напряжениями; $\acute{y}_{k}$ - компоненты тензора диэлектрической проницаемости;

$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l})$- тензор деформации;

В случае пьезокристаллов система уравнений (1-3) рассматривается совместно с определяющим соотношением между напряжением и деформацией, которое будет содержать дополнительное слагаемое, связанное с электрическим полем [1]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{l,k} - e_{ikl}E_k, \tag{4}$$

где c_{ijkl} - упругие жесткости, ρ - плотность среды.

На основе метода разделения переменных система уравнений (1-4) может быть приведена к эквивалентной системе 1-го порядка, описывающей распространение гармонических волн:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \quad \vec{u} = (u_z, \sigma_{zz}, u_x, \sigma_{xz}, u_y, \sigma_{yz}, E_y, H_x, H_y, E_x)^t \tag{5}$$

где u_i, σ_{iz}– компоненты вектора смещения и тензора напряжения; E_y, H_x, H_y, E_x- компоненты электрических и магнитных полей; k_x, k_y – соответственно x и y - компоненты волнового вектора; символ t означает операцию транспонирования в вектор - столбец.

$\hat{B} = \hat{B}\left[c_{ijkl}(z), e_{kij}(z), э_{ij}(z), k_x, k_y\right]$ -матрица коэффициентов

Элементы этой матрицы содержат в себе параметры среды в которой распространяется электроупругая волна.

Ромбическая система характеризуется взаимно перпендикулярными осями симметрии второго порядка.

Ромбическая система класса 222 – система с тремя взаимно перпендикулярными осями, являющимися двукратными осями симметрии. Такая система должна отвечать двум моноклинным системам класса 2: одной с двукратной осью симметрии, параллельной оси Y, и другой – с двукратной осью симметрии, параллельной оси Z. Материальные постоянные должны определяться обеими моноклинными системами. Это условие приводит к уменьшению числа постоянных. Матрицы коэффициентов для ромбической системы класса 222 имеют вид [1]:

$$c_{ijkl}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}; e_{kij}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & e_{25} & 0 \\ 0 & 0 & e_{36} \end{pmatrix}; э_{ij}=\begin{pmatrix} э_{11} & 0 & 0 \\ 0 & э_{22} & 0 \\ 0 & 0 & э_{33} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Здесь мы имеем 9 независимых коэффициентов c_{ijkl} , 3 коэффициента e_{kij} и 3 коэффициента $Э_{ij}$.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет следующий вид:

$$\frac{dU_z}{dz}=\frac{1}{c_{33}}\sigma_{zz}+\left(\frac{ik_x c_{13}}{c_{33}}\right)U_x+\left(\frac{ik_y c_{13}}{c_{33}}\right)U_y \quad \frac{d\sigma_{zz}}{dz}=-\rho\omega^2 U_z+ik_x\sigma_{xz}+ik_y\sigma_{yz}$$

$$\frac{dU_x}{dz}=\frac{1}{c_{55}}\sigma_{xz}+ik_x U_z+\frac{e_{25}}{c_{55}}E_y$$

$$\frac{d\sigma_{xz}}{dz}=\frac{ik_x c_{13}}{c_{33}}\sigma_{zz}+(-\rho\omega^2+k_x^2 c_{11}-\frac{k_x^2 c_{13}^2}{c_{33}}+k_y^2 c_{66}+\frac{k_y^2 e_{36}^2}{э_{33}})U_x+(k_x k_y c_{12}-\frac{k_x k_y c_1}{c_{33}}$$

$$+\frac{k_x k_y e_{36}^2}{э_{33}})U_y-\frac{ik_y^2 e_{36}}{\omega э_{33}}H_x+\frac{ik_x k_y e_{36}}{\omega э_{33}}H_y$$

$$\frac{dU_y}{dz}=\frac{1}{c_{44}}\sigma_{yz}+ik_y U_z+\frac{e_{14}}{c_{44}}E_x$$

$$\frac{d\sigma_{yz}}{dz}=\frac{ik_y c_{13}}{c_{33}}\sigma_{zz}+(-\rho\omega^2+k_x^2 c_{66}+k_y^2 c_{22}-\frac{k_н^2 c_{23}^2}{c_{33}}+\frac{k_x^2 e_{36}^2}{э_{33}})U_y+(k_x k_y c_{66}+\frac{k_x k_y e}{э_{33}}$$

$$-\frac{k_x k_y c_{13} c_{23}}{c_{33}})U_x+\frac{ik_x^2 e_{36}^2}{\omega э_{33}}H_y-\frac{ik_x k_y e_{36}}{\omega э_{33}}H_x$$

$$\frac{dE_y}{dz}=\frac{ik_x k_y}{\omega э_{33}}H_y+(-\frac{ik_y^2}{\omega э_{33}}+i\omega\mu\mu_0)H_x+\frac{k_y^2 e_{36}}{э_{33}}U_x+\frac{k_x k_y e_{36}}{э_{33}}U_y$$

$$\frac{dE_x}{dz}=-\frac{ik_x k_y}{\omega э_{33}}H_x+(\frac{ik_x^2}{\omega э_{33}}-i\omega\mu\mu_0)H_y+\frac{k_x k_y e_{36}}{э_{33}}U_x+\frac{k_x^2 e_{36}}{э_{33}}U_y$$

$$\frac{dH_x}{dz}=\frac{i\omega e_{25}}{c_{55}}\sigma_{xz}+(i\omega\frac{e_{25}^2}{c_{55}}+i\omega э_{22}-\frac{ik_x^2}{\omega\mu\mu_0})E_y+\frac{ik_x k_y}{\omega\mu\mu_0}E_x$$

$$\frac{dH_y}{dz}=-\frac{i\omega e_{14}}{c_{44}}\sigma_{yz}+(-i\omega\frac{e_{14}^2}{c_{44}}-i\omega э_{11}+\frac{ik_y^2}{\omega\mu\mu_0})E_x-\frac{ik_x k_y}{\omega\mu\mu_0}E_y$$

Запишем систему уравнений в матричной форме:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x) \qquad (7)$$

где матрица $\hat{B}$ в одномерном случае имеет следующую структуру:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} & 0 & b_{710} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{710} & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{56} & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \qquad (8)$$

сходя из структуры матрицы коэффициентов следует, что в этом случае в пьезокристалле существует не один, а несколько типов волн, взаимодействие между которыми определяют коэффициенты $b_{35} = \dfrac{e_{25}}{c_{55}}$ и $b_{710} = \dfrac{e_{14}}{c_{44}}$. Эти коэффициенты отражают связь между пьезоэлектрическими модулями и упругими постоянными среды, в которой распространяются волны. Упругая продольная волна, описываемая коэффициентами b_{12} и b_{21} распространяется независимо от других типов волн. Коэффициент b_{35} определяет взаимодействие между упругой поперечной волной x- поляризации и электромагнитной ТЕ-волной, а коэффициент b_{710} между упругой поперечной волной y- поляризации и электромагнитной ТМ- волной.

При распространении волн в координатной плоскости xz система уравнений записывается в следующем матричном виде:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x) \qquad (9)$$

где матрица $\hat{B}$ имеет структуру:

$$\hat{B}=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} & 0 & b_{710} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{87} & 0 & b_{89} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{710} & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\omega}{i}b_{89} & 0 & b_{109} & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}=\begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \tag{10}$$

В этом случае коэффициенты $b_{13}=\frac{ik_x c_{13}}{c_{33}}$, $b_{24}=\frac{1}{c_{55}}$ и $b_{35}=\frac{e_{14}}{c_{44}}$ определяют взаимосвязь между упругой продольной, упругой поперечной волной x- поляризации и электромагнитной TE- волной, а $b_{710}=\frac{e_{14}}{c_{44}}, b_{89}=\frac{ik_x^2 e_{36}^2}{\omega э_{33}}$ между упругой поперечной волной y- поляризации и электромагнитной TM- волной.

При распространении волн в координатной плоскости yz система уравнений записывается в следующем матричном виде:

$$\frac{d\vec{u}}{dz}=\hat{B}\vec{u};\vec{u}=(U_z,\sigma_{zz},U_y,\sigma_{yz},H_y,E_x,U_x,\sigma_{xz},E_y,H_x) \tag{11}$$

где матрица $\hat{B}$ имеет структуру:

$$\hat{B}=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & b_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{36} & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} & b_{79} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{87} & 0 & 0 & b_{810} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\omega}{i}b_{810} & 0 & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega b_{79} & b_{109} & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}=\begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \end{pmatrix} \tag{12}$$

В этом случае коэффициенты $b_{13}=\frac{ik_y c_{13}}{c_{33}}$, $b_{24}=ik_y$ и $b_{36}=\frac{e_{14}}{c_{44}}$ определяют взаимосвязь между упругой продольной, упругой поперечной волной y- поляризации и электромагнитной TM- волной, а коэффициенты $b_{79}=\frac{e_{25}}{c_{55}}, b_{810}=-\frac{ik_y^2 e_{36}}{\omega э_{33}}$ между упругой поперечной волной x- поляризации и электромагнитной TE- волной.

Коэффициенты, определяющие взаимосвязь между различными типами волн, обеспечивают постоянный переход энергии упругих волн в энергию электромагнитных волн и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986.

2. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982.

3. Тлеукенов С.К. Распространение волн в неоднородных пьезокристаллах гексагональной сингонии.//Сб. научн. трудов.КазНТУ, ч.II. Алматы,1994. С.62-65.

4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука,1988.

Түйіндеме

Берілген мақалада және анаитикалық әдісі негізінде 222 классты ромбалық сингониялы пьезокристалдардағы серпімді электрлік толқындардың таралу заңдылықтары зерттелген. Максвел және қозғалыс теңдеулерінің толық жүйелері шешілген және анықталған, матрица коэффициенттернің құрылымы құрастырылған.

Resume

In the given article and on the basis of an analytical method of a matriciant are studied of regularity of distribution of elastic waves in piezocrystals rhombic singony of the class 222. Is obtained and the complete set of Maxwell equations and equations of motion is resolved, the frame of matrixes of factors is constructed.

УДК 539.3:534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТОК ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

С.К. Ельмуратов

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

Исследовать сходимость решений по вынужденным колебаниям пластин, а тем более оболочек – задача очень непростая. Обзор исследований в этой