УДК 534.2:537.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛН РЭЛЕЯ ВДОЛЬ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД КУБИЧЕСКОЙ, ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ И РОМБИЧЕСКОЙ СИНГОНИЙ

Е.К. Баяубаев, С.К. Тлеукенов
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

В рамках метода матрицанта [1,2] классические уравнения движения упругих анизотропных сред приводятся к матричному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = \hat{B}\vec{W}$$

где $\vec{W} = [u_z, \sigma_{zz}, u_x, \sigma_{xz}, u_y, \sigma_{yz}]^t$; u_x, u_y, u_z - компоненты вектора смещения, $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$- компоненты тензора напряжений.

Структура матрицы коэффициентов B позволяет ввести понятие и построить структуру матрицанта рассматриваемой системы уравнений. Одним из следствий построения матрицанта является возможность получения матрицанта однородных анизотропных сред в явной аналитической форме. Это представление позволяет рассмотреть и решить вопрос о существовании волн Рэлея на свободной границе анизотропных сред. На основе метода матрицанта были получены условия существования волн Рэлея на свободной границе для широкого класса анизотропных сред в виде [2]:

$$\sqrt{\left(b_{12}b_{43} - b_{13}^2\right)\left(b_{21}b_{34} - b_{24}^2\right)}b_{43} - \left(b_{12}b_{43} - b_{13}^2\right)b_{21} = 0 \qquad (1)$$

При распространении упругих волн в кристаллах кубической, ромбической, гексагональной сингоний матрица коэффициентов $\hat{B}$ приводится к структуре в виде:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 \\ b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} \\ 0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Различия лишь только в коэффициентах $b_{i,j}$.

1. Кубическая сингония. Для кубической сингонии коэффициенты матрицы B принимают значения:

$$b_{12}=\frac{1}{c_{11}},\ b_{13}=im\frac{c_{12}}{c_{11}},\ b_{15}=in\frac{c_{12}}{c_{11}},\ b_{21}=-\omega^2\rho,\ b_{24}=im,\ b_{26}=in,\ b_{34}=\frac{1}{c_{44}},$$

$$b_{43}=-\omega^2\rho+m^2\left(\frac{c_{11}^2-c_{12}^2}{c_{11}}\right)+n^2c_{44},\ b_{45}=mn\left(c_{12}-\frac{c_{12}^2}{c_{11}}+c_{44}\right),\ b_{56}=b_{34}, \qquad (3)$$

$$b_{65}=-\omega^2\rho+m^2c_{44}+n^2\left(\frac{c_{11}^2-c_{12}^2}{c_{11}}\right)$$

где m, n – компоненты волнового вектора, c_{ij} - упругие параметры среды, ω - круговая частота, ρ- плотность среды.

Для плоскости xz (n=0) данные коэффициенты (3) принимают вид:

$$b_{12}=\frac{1}{c_{11}},\ b_{13}=im\frac{c_{12}}{c_{11}},\ b_{15}=0,\ b_{21}=-\omega^2\rho,\ b_{24}=im,\ b_{26}=0,\ b_{34}=\frac{1}{c_{44}},$$

$$b_{43}=-\omega^2\rho+m^2\left(\frac{c_{11}^2-c_{12}^2}{c_{11}}\right),\ b_{45}=0,\ b_{56}=b_{34}, \qquad (4)$$

Условия существования волн Рэлея находим, подставляя (4) в (1):

$$\sqrt{\left(m^2-\frac{\omega^2\rho}{c_{11}}\right)\left(m^2-\frac{\omega^2\rho}{c_{44}}\right)}\left(m^2\frac{c_{11}^2-c_{12}^2}{c_{11}}-\omega^2\rho\right)-\left(m^2-\frac{\omega^2\rho}{c_{11}}\right)\frac{1}{c_{11}}=0 \qquad (5)$$

Решая (5) получим зависимость скорости волн Рэлея от частоты.

Для плоскости yz (m=0)

$$b_{12}=\frac{1}{c_{11}},\ b_{13}=0,\ b_{15}=in\frac{c_{12}}{c_{11}},\ b_{21}=-\omega^2\rho,\ b_{24}=0,\ b_{26}=in,\ b_{34}=\frac{1}{c_{44}},$$

$$b_{43}=-\omega^2\rho+n^2c_{44},\ b_{45}=0,\ b_{56}=b_{34},\ b_{65}=-\omega^2\rho+n^2\left(\frac{c_{11}^2-c_{12}^2}{c_{11}}\right)$$

Путем перестановки строк и столбцов матрица $\hat{B}$ приводится к структуре (2), и уравнение (1) принимает вид:

$$\sqrt{\left(b_{12}b_{43}-b_{15}^2\right)\left(b_{21}b_{34}-b_{26}^2\right)}b_{43}-\left(b_{12}b_{43}-b_{15}^2\right)b_{21}=0 \qquad (6)$$

2. Для кристаллов ромбической сингонии коэффициенты матрицы (2) имеют вид:

$$b_{12}=\frac{1}{c_{33}},\ b_{13}=im\frac{c_{13}}{c_{33}},\ b_{15}=in\frac{c_{23}}{c_{33}},\ b_{21}=-\omega^2\rho,\ b_{24}=im,\ b_{26}=in,\ b_{34}=\frac{1}{c_{55}},$$

$$b_{43}=-\omega^2\rho+m^2\left(\frac{c_{11}^2-c_{13}^2}{c_{33}}\right)+n^2c_{66},\ b_{45}=mn\left(c_{12}-\frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}+c_{66}\right),\ b_{56}=\frac{1}{c_{44}},$$

$$b_{65}=-\omega^2\rho+m^2c_{66}+n^2\left(c_{22}-\frac{c_{23}^2}{c_{33}}\right)$$

Для плоскости xz (n=0)

$$b_{12}=\frac{1}{c_{33}},\quad b_{13}=im\frac{c_{13}}{c_{33}},\quad b_{15}=0,\quad b_{21}=-\omega^2\rho,\quad b_{24}=im,\quad b_{26}=0,\quad b_{34}=\frac{1}{c_{55}},$$

$$b_{43}=-\omega^2\rho+m^2\left(\frac{c_{11}^2-c_{13}^2}{c_{33}}\right),\ b_{45}=0,\ b_{56}=\frac{1}{c_{44}},\ b_{65}=-\omega^2\rho+m^2c_{66}$$

Для плоскости yz (m=0)

$$b_{12}=\frac{1}{c_{33}},\quad b_{13}=0,\quad b_{15}=in\frac{c_{23}}{c_{33}},\quad b_{21}=-\omega^2\rho,\quad b_{24}=0,\quad b_{26}=in,\quad b_{34}=\frac{1}{c_{55}},$$

$$b_{43}=-\omega^2\rho+n^2c_{66},\ b_{45}=0,\ b_{56}=\frac{1}{c_{44}},\ b_{65}=-\omega^2\rho+n^2\left(c_{22}-\frac{c_{23}^2}{c_{33}}\right)$$

2. Гексагональная сингония.

$$b_{12}=\frac{1}{c_{33}},\ b_{13}=im\frac{c_{13}}{c_{33}},\ b_{15}=in\frac{c_{13}}{c_{33}},\ b_{21}=-\omega^2\rho,\ b_{24}=im,\ b_{26}=in,\ b_{34}=\frac{1}{c_{44}},$$

$$b_{43}=-\omega^2\rho+m^2\left(\frac{c_{11}c_{33}-c_{13}^2}{c_{33}}\right)+n^2\left(c_{11}-\frac{c_{12}}{2}\right),\ b_{45}=mn\left(c_{12}-\frac{c_{13}^2}{c_{33}}+\frac{c_{11}-c_{12}}{2}\right),\ b_{56}=b_{34},$$

$$b_{65}=-\omega^2\rho+m^2\frac{c_{11}-c_{12}}{2}+n^2\left(c_{11}-\frac{c_{13}^2}{c_{33}}\right)$$

Для плоскости xz (n=0)

$$b_{12}=\frac{1}{c_{33}},\ b_{13}=im\frac{c_{13}}{c_{33}},\ b_{15}=0,\ b_{21}=-\omega^2\rho,\ b_{24}=im,\ b_{26}=0,\ b_{34}=\frac{1}{c_{44}},$$

$$b_{43}=-\omega^2\rho+m^2\left(\frac{c_{11}c_{33}-c_{13}^2}{c_{33}}\right),\ b_{45}=0,\ b_{65}=-\omega^2\rho+m^2\frac{c_{11}-c_{12}}{2}$$

Для плоскости yz (m=0)

$$b_{12}=\frac{1}{c_{33}},\ b_{13}=0,\ b_{15}=in\frac{c_{13}}{c_{33}},\ b_{21}=-\omega^2\rho,\ b_{24}=0,\ b_{26}=in,\ b_{34}=\frac{1}{c_{44}},$$

$$b_{43}=-\omega^2\rho+n^2\left(c_{11}-\frac{c_{12}}{2}\right),\ b_{45}=0,\ b_{56}=b_{34},\ b_{65}=-\omega^2\rho+n^2\left(c_{11}-\frac{c_{13}^2}{c_{33}}\right)$$

В работе в явной форме приведены элементы матриц коэффициентов $\hat{B}$ для анизотропных упругих сред кубической, гексагональной и ромбической сингоний. Подстановка явного вида b_{ij} в уравнения (1) и (6) позволяет определить скорости волн Рэлея вдоль свободной поверхности анизотропных упругих сред рассматриваемых сингоний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тлеукенов С.К. Метод матрицанта. Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. – 148 с.

2. Тлеукенов С.К., Альжанов А.Б., Баяубаев Е.К. О поверхностных волнах Рэлея в анизотропных средах// II Ержановтық оқулар Халықаралық ғылыми-техникалық конференция материалдары. Ақтөбе: Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе мемлекеттік университетінің Редакциялық – баспа бөлімі, 2007.- 512 б.

3. Физическая акустика Gод ред. У. Мэзона. Том 6 Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А. – М.: Мир, 1966. – 589 с.

Түйіндеме

Жұмыста матрицант әдісінің негізінде кубты, гексогоналды және ромбты сингониялы серпімді анизотропты орталар арсындағы еркін шекарасында Релей толқындардың бар болу шарттары шығарылды. Сингониялар үшін коэффициенттер матрицасының элементтері келтірілген. b_{ij} элементтерінің анық қарастырылып отырған сингониялы анизотропты серпімді орталар арсындағы еркін бет бойымен таралатын Релей толқындар жылдамдығын анықтауға мүмкіндік береді.

Resume

In work on the basis of a method matrizer conditions of existence of waves Rayleigh on free border of elastic anisotropic environments cubic, hexagonal and rhombic system are received. Elements of matrixes of factors for these systems are resulted. Substitution of an obvious kind $\mathbf{b}_{ij}$ *allows to define speeds of waves Rayleigh along a free surface of anisotropic elastic environments considered systems.*