УДК 534.2:537.2

УРАВНЕНИЯ ДИСПЕРСИИ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ТЕТРАГОНАЛЬНОЙ СИНГОНИИ 422

А.Б. Альжанов
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

Введение понятия структуры матриканта и ее определение позволили распространить классические методы, развитые Бриллюэном и Пароди для дискретных периодических структур, на сплошные периодические неоднородные среды.

Периодически неоднородная анизотропная среда, в случае электроупругих волн, описывается периодическими функциями пространственной координаты и удовлетворяет условиям:

$$\varepsilon_{ij}(z+h)=\varepsilon_{ij};\mu(z+h)=\mu(z) \tag{1}$$

где h- период неоднородности.

Основной характеристикой, определяющей закономерности элетроупругих волновых процессов в неограниченной периодической структуре, являются уравнения дисперсии. Построенная во второй главе структура матриканта позволяет модифицировать условие существования нетривиальных решений и в два раза понизить степень характеристического уравнения.

Из теоремы Блоха следует, что в случае трансляционной симметрии:

$$\vec{u}(h)=e^{i\tilde{k}h}\vec{u}(0) \tag{2}$$

где $\vec{u}$ - вектор- столбец решений уравнения

$$\frac{d\vec{u}}{dz}=\hat{B}\vec{u} \tag{3}$$

Матрикант уравнения (3) для периода неоднородности h есть матрица монодромии. На ее основе имеем:

$$\vec{u}(h) = \hat{T}\,\vec{u}(0) \tag{4}$$

Объединяя (2) и (4) получим:

$$(\hat{T} - e^{i\tilde{k}h}\,\hat{E})\vec{u}(0) = 0 \tag{5}$$

где $\hat{E}$ - единичная матрица.
Из условия

$$\det[\hat{T} - e^{i\tilde{k}h}\,\hat{E}] = 0 \tag{6}$$

следует характеристическое уравнение, корни которого определяют искомые уравнения дисперсии волн в неограниченной периодической структуре.

Умножение (5) на $\hat{T}^{-1}\ e^{-i\tilde{k}h}$ приводит к уравнению:

$$(\hat{T}^{-1} - e^{-i\tilde{k}h}\,\hat{E})\vec{u}(0) = 0 \tag{7}$$

Соотношения (5) и (7) эквивалентны, определяют один и тот же спектр. Физически это означает, что волны, распространяющие в неограниченной периодической структуре в противоположных направлениях, имеющих один закон дисперсии. Объединяя эти соотношения приходим к следующей модифицированной форме условия существования нетривиальных решений:

$$\det[\hat{p} - \hat{E}\cos\tilde{k}h] = 0 \tag{8}$$

В условии (8) введена очень важная для регулярных структур и широко используемая в дальнейшем, матрица:

$$\hat{p} = \frac{1}{2}[\hat{T} + \hat{T}^{-1}] \tag{9}$$

При одномерном распространение электроупругих волн в пьезокристалле тетрагональной сингонии класса 422 матрицы $\hat{T}$ и $\hat{T}^{-1}$ имеют структуру:

$$
T=\begin{pmatrix}
t_{11}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&t_{22}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&t_{33}&0&0&0&0&t_{38}&0&0\\
0&0&0&t_{44}&0&0&t_{47}&0&0&0\\
0&0&0&0&t_{55}&0&0&0&t_{59}&0\\
0&0&0&0&0&t_{66}&0&0&0&t_{610}\\
0&0&0&t_{74}&0&0&t_{77}&0&0&0\\
0&0&t_{83}&0&0&0&0&t_{88}&0&0\\
0&0&0&0&t_{95}&0&0&0&t_{99}&0\\
0&0&0&0&0&t_{106}&0&0&0&t_{1010}
\end{pmatrix}
+i\begin{pmatrix}
0&t_{12}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
t_{21}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&t_{34}&0&0&t_{37}&0&0&0\\
0&0&t_{43}&0&0&0&0&t_{48}&0&0\\
0&0&0&0&0&t_{56}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&t_{65}&0&0&0&t_{69}&0\\
0&0&t_{73}&0&0&0&0&t_{78}&0&0\\
0&0&0&t_{84}&0&0&t_{87}&0&0&0\\
0&0&0&0&0&t_{96}&0&0&0&t_{910}\\
0&0&0&0&t_{105}&0&0&0&t_{109}&0
\end{pmatrix} \qquad (10)
$$

$$
T^{-1}=\begin{pmatrix}
t_{22}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&t_{11}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&t_{44}&0&0&0&0&-\frac{t_{74}}{\omega}&0&0\\
0&0&0&t_{33}&0&0&-\frac{t_{83}}{\omega}&0&0&0\\
0&0&0&0&t_{66}&0&0&0&-\frac{t_{106}}{\omega}&0\\
0&0&0&0&0&t_{55}&0&0&0&-\frac{t_{95}}{\omega}\\
0&0&0&\omega t_{38}&0&0&t_{88}&0&0&0\\
0&0&\omega t_{47}&0&0&0&0&t_{77}&0&0\\
0&0&0&0&-\omega t_{610}&0&0&0&t_{1010}&0\\
0&0&0&0&0&-\omega t_{59}&0&0&0&t_{99}
\end{pmatrix}
-i\begin{pmatrix}
0&t_{12}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
t_{21}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&t_{34}&0&0&\frac{t_{84}}{\omega}&0&0&0\\
0&0&t_{43}&0&0&0&0&\frac{t_{73}}{\omega}&0&0\\
0&0&0&0&0&t_{56}&0&0&0&-\frac{t_{96}}{\omega}\\
0&0&0&0&t_{65}&0&0&0&-\frac{t_{105}}{\omega}&0\\
0&0&\omega t_{48}&0&0&0&0&t_{78}&0&0\\
0&0&0&\omega t_{37}&0&0&t_{87}&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-\omega t_{510}&0&0&0&t_{910}\\
0&0&0&0&-\omega t_{69}&0&0&0&t_{109}&0
\end{pmatrix} \qquad (11)
$$

Из определения (9) матрицы $\hat{p}$ следует ее структура:

$$
\hat{p}=\begin{pmatrix}
p_{11}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&p_{11}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&p_{33}&0&p_{37}&p_{38}&0&0&0&0\\
0&0&0&p_{33}&p_{47}&p_{48}&0&0&0&0\\
0&0&-p_{48}&-p_{38}&p_{77}&0&0&0&0&0\\
0&0&p_{47}&-p_{37}&0&p_{77}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&p_{55}&p_{59}&p_{510}&0\\
0&0&0&0&0&0&0&p_{55}&p_{69}&p_{610}\\
0&0&0&0&0&0&-p_{610}&p_{510}&p_{99}&0\\
0&0&0&0&0&0&p_{69}&-p_{59}&0&p_{99}
\end{pmatrix}
\vec{u}=\begin{pmatrix}U_z\\ \sigma_{zz}\\ U_x\\ \sigma_{xz}\\ E_y\\ H_x\\ U_y\\ \sigma_{yz}\\ H_y\\ E_x\end{pmatrix} \qquad (12)
$$

Раскрытие определителя в (8) с учетом (12) приводит к уравнению:

$$
[(p_{11}-\lambda)^2(p_{33}-\lambda)(p_{77}-\lambda)]+p_{37}p_{48}-p_{38}p_{47})^2
$$
$$
((p_{55}-\lambda)(p_{99}-\lambda)+p_{59}p_{610}-p_{510}p_{69})^2]=0 \qquad (13)
$$

Уравнение (13) имеет корни:

$$
\tilde{p}_1 = p_1
$$
$$
\tilde{p}_2=\frac{1}{2}[p_{33}+p_{77}-\sqrt{(p_{33}-p_{77})^2+4(p_{38}p_{47}-p_{37}p_{48}}] \qquad (14)
$$

$$\widetilde{p}_3 = \frac{1}{2}[\,p_{33} + p_{77} + \sqrt{(p_{33} - p_{77})^2 + 4(p_{38}p_{47} - p_{37}p_{48}}\,]$$

$$\widetilde{p}_4 = \frac{1}{2}[\,p_{55} + p_{99} - \sqrt{(p_{55} - p_{99})^2 + 4(p_{510}p_{69} - p_{59}p_{610}}\,]$$

$$\widetilde{p}_4 = \frac{1}{2}[\,p_{55} + p_{99} + \sqrt{(p_{55} - p_{99})^2 + 4(p_{510}p_{69} - p_{59}p_{610}}\,]$$

$cos\,\widetilde{k}_1 = \widetilde{p}_1$; $cos\,\widetilde{k}_2 = \widetilde{p}_2$; $cos\,\widetilde{k}_3 = \widetilde{p}_3$; $cos\,\widetilde{k}_4 = \widetilde{p}_4$; $cos\,\widetilde{k}_5 = \widetilde{p}_5$

При распространение электроупругих волн в пьезокристалле тетрагональной сингонии класса 422 вдоль координатной плоскости xz матрицы $\hat{T}$ и $\hat{T}^{-1}$ имеют структуру:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & t_{14} & 0 & 0 & t_{17} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & t_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{32} & t_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{38} & 0 & 0 \\ t_{41} & 0 & 0 & t_{44} & 0 & 0 & t_{47} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & t_{59} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & t_{610} \\ 0 & 0 & 0 & t_{74} & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{82} & t_{83} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{88} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{95} & 0 & 0 & 0 & t_{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{106} & 0 & 0 & 0 & t_{1010} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & t_{24} & 0 & 0 & t_{27} & 0 & 0 & 0 \\ t_{31} & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & t_{37} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{42} & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{48} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & 0 & t_{510} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 & t_{69} & 0 \\ 0 & t_{72} & t_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 & 0 \\ t_{81} & 0 & 0 & t_{84} & 0 & 0 & t_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{96} & 0 & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{105} & 0 & 0 & 0 & t_{109} & 0 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & 0 & 0 & t_{32} & 0 & 0 & \frac{t_{82}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{11} & t_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{14} & t_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{74}}{\omega} & 0 & 0 \\ t_{23} & 0 & 0 & t_{33} & 0 & 0 & \frac{t_{83}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{106}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{95}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & \omega t_{38} & 0 & 0 & t_{88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega t_{17} & \omega t_{47} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{610} & 0 & 0 & 0 & t_{1010} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{59} & 0 & 0 & 0 & t_{99} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{72}}{\omega} & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & t_{31} & 0 & \frac{t_{81}}{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{24} & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & \frac{t_{84}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{13} & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{73}}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{96}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{105}}{\omega} & 0 \\ 0 & \omega t_{18} & \omega t_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 & 0 \\ \omega t_{27} & 0 & 0 & \omega t_{37} & 0 & 0 & t_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{510} & 0 & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{69} & 0 & 0 & 0 & t_{109} & 0 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Из определения (9) матрицы $\hat{p}$ следует ее структура:

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & p_{13} & p_{14} & 0 & 0 & p_{17} & p_{18} & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & p_{23} & p_{24} & 0 & 0 & p_{27} & 0 & 0 & 0 \\ -p_{24} & p_{14} & p_{33} & 0 & 0 & 0 & p_{37} & p_{38} & 0 & 0 \\ p_{23} & -p_{13} & 0 & p_{33} & 0 & 0 & p_{47} & p_{48} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & 0 & 0 & 0 & p_{59} & p_{510} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & 0 & 0 & p_{69} & p_{610} \\ 0 & -p_{18} & -p_{48} & p_{38} & 0 & 0 & p_{77} & 0 & 0 & 0 \\ -p_{27} & p_{17} & p_{47} & -p_{37} & 0 & 0 & 0 & p_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{610} & p_{510} & p_{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{69} & -p_{59} & 0 & p_{99} \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \qquad (17)$$

Раскрытие определителя в (8) с учетом (17) приводит к уравнению, которое разделяется на два уравнения второй и третьей степени:

$$[\lambda^2 - (p_{55} + p_{99})\lambda + p_{55}p_{99} - p_{69}p_{510} + p_{610}p_{59}] = 0 \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&[\lambda^3 + (-p_{11} - p_{77} - p_{33})\lambda^2 + (p_{13}p_{24} + p_{18}p_{27} - p_{38}p_{47} + p_{37}p_{48} + p_{33}p_{77} + p_{11}p_{33} + \\
&+ p_{11}p_{77} - p_{14}p_{23})\lambda + (-p_{18}p_{27}p_{33} - p_{17}p_{23}p_{38} + p_{13}p_{27}p_{38} + p_{18}p_{24}p_{47} - p_{17}p_{24}p_{48} - \\
&- p_{13}p_{24}p_{77} + p_{11}p_{38}p_{47} - p_{11}p_{37}p_{48} - p_{11}p_{33}p_{77} + p_{14}p_{27}p_{48} + p_{14}p_{23}p_{77}) = 0]
\end{aligned} \tag{19}$$

Или $$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$$

Уравнение (18) имеет корни:

$$\widetilde{p}_4 = \frac{1}{2}[p_{55} + p_{99} - \sqrt{(p_{55} - p_{99})^2 + 4(p_{69}p_{510} - p_{610}p_{59}}]$$

$$\widetilde{p}_5 = \frac{1}{2}[p_{55} + p_{99} + \sqrt{(p_{55} - p_{99})^2 + 4(p_{69}p_{510} - p_{610}p_{59}}] \tag{20}$$

$$cos\,\widetilde{k}_4 = \widetilde{p}_4; \quad cos\,\widetilde{k}_5 = \widetilde{p}_5$$

Уравнение (19) имеет следующие корни:

$$\widetilde{p}_1 = \frac{\alpha}{a\sqrt[3]{32}} - \frac{b}{3a} - \frac{\sqrt[3]{2}(3ac - b^2)}{3a\alpha},$$

$$\widetilde{p}_2 = \frac{(1 - i\sqrt{3})\alpha}{a\sqrt[3]{62}} - \frac{b}{3a} + \frac{(1 + i\sqrt{3})(3ac - b^2)}{\sqrt[3]{32}\alpha} \tag{21}$$

$$\widetilde{p}_3 = \frac{(1 + i\sqrt{3})\alpha}{a\sqrt[3]{62}} - \frac{b}{3a} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(3ac - b^2)}{a\sqrt[3]{32}\alpha}$$

где

$$\alpha = \sqrt[3]{-2b^3 + 9acb - 27a^2d + \sqrt{4(3ac - b^2)^3 + (-2b^3 - 9acb - 27a^2d)^2}}$$

$$cos\,\widetilde{k}_1 = \widetilde{p}_1; \; cos\,\widetilde{k}_2 = \widetilde{p}_2; \; cos\,\widetilde{k}_3 = \widetilde{p}_3$$

Уравнения дисперсии (13), (18), (19) характеризуют электроупругие свойства пьезоэлектрической среды.

Знание корней (14), (20), (21) дает уравнения дисперсии в неограниченной периодической структуре и в общем виде могут быть записаны как:

$$cos\,\widetilde{k}_i h = \widetilde{p}_i \tag{22}$$

Для уравнений дисперсии (3.3.13) области прозрачности удовлетворяют условиям

$$\left|\operatorname{Re}\tilde{p}_i\right| < 1, \quad \operatorname{Im}\tilde{p}_i = 0 \cdot$$

Границы между зонами прозрачности и непропускания определяются равенствами

$$\left|\operatorname{Re}\tilde{p}_i\right| = 1, \quad \operatorname{Im}\tilde{p}_i = 0 \,.$$

Дисперсионные кривые, определяемые из условия $p(\omega, c) = \pm 1$ дают границы зон пропускания и непропускания в неограниченной периодически неоднородной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рязанов М.И. Электродинамика конденсированного вещества. М.: Наука, 1984-304с.

2. Богульский И.О., Петров С.Я., Шабассов А.В. Электромагнитные волны в неограниченных и конечных сверхрешетках.//Оптика и спектр. 1998. 84, №5, с.823-828

3. Голубев Л.В., Леонов Е.И. Сверхрешетки. М.:Знание. 1977-64с.

4. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред в периодической структуре. Киев: Наукова думка, 1981-200с.

5. Ярив А. , П. Юх. Оптические волны в кристаллах. М.: Наука, 1987-616с.

6. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982.

7. Тлеукенов С.К., Сагайдак Т.В. Структура фундаментальных решений полной системы уравнений Максвелла и уравнений движения электроупругой волны Материалы науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «III Сатпаевские чтения». Павлодар, 2003, Т.7, С. 158-163.

Түйіндеме

Берілген мақалада толқынның таралу заңдылыгын анықтайтын негізгі сипаттамасы болып табылатын 422 класты тетрогональды сингонияның шектелмеген құрылымындагы серпімді электрлік толқындардың дисперсияларының теңдеулері құрасытырылган.

Resume

In the given article the equations of a dispersion of elastic waves in unlimited periodic frame tetragonal singony of the class 422 are constructed, which one are basic performance determining regularity of a wave propagation.