УДК 539.3:534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ НДС ОКРУЖАЮЩЕГО ДВУХСЛОЙНУЮ ОБОЛОЧКУ МАССИВА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СКОРОСТЯХ БЕГУЩЕЙ ПО ЕЁ ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

В.Н. Украинец, С.Р. Гирнис

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

Серпінді кеңістікте екі қабатты қабыққа жүгірмелі кезеңдік жүктеменің әрекеті туралы есепті шығару негізінде жүктеме қозғалысы жылдамның қабықты қоршаған массив реакциясына ықпалы зерттеледі.

On base of task solution on effect of streaming load is researched influence of speed movement on reaction of surrounding shell of body on two-layer shell in elastic space.

Задачи о действии подвижной осесимметричной нормальной нагрузки на тонкостенную и толстостенную круговую цилиндрическую оболочку в упругой среде рассматривались соответственно в статьях [1,2]. В настоящей работе решена задача о действии бегущей периодической нагрузки на двухслойную оболочку в упругом пространстве и на основе этого решения исследуется напряженно-деформированное состояние (НДС) окружающего ее массива при различных дозвуковых скоростях движения нагрузки. Данная задача является модельной, например, при исследовании динамики тоннелей глубокого заложения, подкрепленных двухслойной цилиндрической оболочкой (обделкой) [3].

1. Рассмотрим цилиндрическую полость радиусом R_1 в бесконечной, линейно-упругой, однородной и изотропной среде. Полость подкреплена двухслойной оболочкой, внутренним слоем которой является тонкостенная оболочка толщиной h_0 и радиусом срединной поверхности R_2, а внешним – толстостенная оболочка. В силу малости толщины внутреннего слоя можно принять, что он контактирует с внешним слоем вдоль своей срединной поверхности. Контакт между слоями оболочки и окружающей её упругой средой

(массивом) будем полагать жестким. По внутренней поверхности оболочки в направлении ее оси z с постоянной скоростью c (меньшей, чем скорости распространения волн сдвига во внешнем слое оболочки и окружающей ее среде) движется нагрузка интенсивностью P.

Так как рассматривается установившийся процесс, то картина деформаций стационарна по отношению к движущейся нагрузке. Поэтому удобно перейти к подвижной цилиндрической системе координат r,θ,η=z-tc. Тогда, в случае синусоидальной с произвольной зависимостью от угловой координаты нагрузки, имеем

$$
\begin{aligned}
&P(\theta,\eta)=p(\theta)e^{i\xi\eta}, \quad p(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\theta},\\
&P_j(\theta,\eta)=p_j(\theta)e^{i\xi\eta}, \quad p_j(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj} e^{in\theta}, \quad j=r,\theta,\eta,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где константа ξ определяет период $T=2\pi/\xi$ действующей нагрузки, $P_j(\theta,\eta)$ – составляющие интенсивности нагрузки $P(\theta,\eta)$.

Для описания движения внутреннего слоя оболочки воспользуемся классическими уравнениями теории тонких оболочек

$$
\begin{aligned}
&\left[1-\frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0}\right]\frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial\eta^2}+\frac{1-\nu_0}{2R_2^2}\frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial\theta^2}+\frac{1+\nu_0}{2R_2}\frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial\eta\partial\theta}+\frac{\nu_0}{R_2}\frac{\partial u_{0r}}{\partial\eta}=\frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0}(P_\eta-q_\eta),\\
&\frac{1+\nu_0}{2R_2}\frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial\eta\partial\theta}+\frac{(1-\nu_0)}{2}\left(1-\frac{\rho_0 c^2}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial\eta^2}+\frac{1}{R_2^2}\frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial\theta^2}+\frac{1}{R_2^2}\frac{\partial u_{0r}}{\partial\theta}=\frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0}(P_\theta-q_\theta),\\
&\frac{\nu_0}{R_2}\frac{\partial u_{0\eta}}{\partial\eta}+\frac{1}{R_2^2}\frac{\partial u_{0\theta}}{\partial\theta}+\frac{h_0^2}{12}\nabla^2\nabla^2 u_{0r}+\frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0}\frac{\partial^2 u_{0r}}{\partial\eta^2}+\frac{u_{0r}}{R_2^2}=-\frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0}(P_r-q_r)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $u_{0\eta}$, $u_{0\theta}$, u_{0r} – перемещения точек срединной поверхности внутреннего слоя в направлении осей цилиндрической системы координат η, θ, r; P_η, P_θ, P_r – составляющие интенсивности подвижной нагрузки P; $q_\eta=\sigma_{r\eta 2}\big|_{r=R_2}$, $q_\theta=\sigma_{r\theta 2}\big|_{r=R_2}$, $q_r=\sigma_{r\,2}\big|_{r=R_2}$ – составляющие реакции внешнего слоя; $\sigma_{jj\,2}$ – компоненты тензора напряжений во внешнем слое (q_{jj}); ν_0,μ_0,ρ_0 – соответственно коэффициент Пуассона, модуль сдвига и плотность материала внутреннего слоя; ∇^2 – оператор Лапласа.

В установившемся состоянии зависимость всех величин от η имеет вид (1), поэтому

$$
u_{0j}(\theta,\eta)=U_{0j}(\theta)e^{i\xi\eta}, \quad U_{0j}(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{0nj} e^{in\theta}, \quad j=r,\theta,\eta\cdot
\tag{3}
$$

Подставляя (1) и (3) в (2), для n-го члена разложения получим

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1^2 u_{0n\eta} + \nu_{02} n\xi_0 u_{0n\theta} - 2i\nu_0\xi_0 u_{0n} = G_0\left(P_{n\eta} - q_{n\eta}\right)\\
&\nu_{02} n\xi_0 u_{0n\eta} + \varepsilon_2^2 u_{0n\theta} - 2inu_{0n} = G_0\left(P_{n\theta} - q_{n\theta}\right),\\
&2i\nu_0\xi_0 u_{0n\eta} + 2inu_{0n\theta} + \varepsilon_3^2 u_{0n} = G_0\left(P_{n} - q_{n}\right),
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

где $\varepsilon_1^2 = \alpha_0^2 - \varepsilon_0^2,\ \varepsilon_2^2 = \beta_0^2 - \varepsilon_0^2,\ \varepsilon_3^2 = \gamma_0^2 - \varepsilon_0^2,\ \ \xi_0 = \xi R_2,$

$\alpha_0^2 = 2\xi_0^2 + \nu_{01}n^2,\ \beta_0^2 = \nu_{01}\xi_0^2 + 2n^2,\ \gamma_0^2 = \chi^2\left(\xi_0^2 + n^2\right)^2 + 2,\ \varepsilon_0^2 = \nu_{01}\xi_0^2 M_{s0}^2,$

$\nu_{01} = 1 - \nu_0,\ \nu_{02} = 1 + \nu_0,\ M_{s0} = c/c_{s0},\ c_{s0} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\rho_0}},\ \chi^2 = \dfrac{h_0^2}{6R_2^2},\ G_0 = -\dfrac{\nu_{01}R_2^2}{\mu_0 h_0}$

$q_{nj} = (\sigma_{rj2})_n,\ j = \eta, \theta, r$ при $r = R_2$.

Разрешая (4) относительно $u_{0n\eta}, u_{0n\theta}, u_{0n}$, находим

$$
\begin{aligned}
&u_{0n\eta} = \frac{G_0}{\delta_n}\sum_{j=1}^{3}\delta_{\eta j}\left(P_{nj} - q_{nj}\right)\\
&u_{0n\theta} = \frac{G_0}{\delta_n}\sum_{j=1}^{3}\delta_{\theta j}\left(P_{jn} - q_{jn}\right) \qquad (5)\\
&u_{0nr} = \frac{G_0}{\delta_n}\sum_{j=1}^{3}\delta_{rj}\left(P_{jn} - q_{jn}\right).
\end{aligned}
$$

Здесь $\delta_n = \delta_{|n|} = \left(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\right)^2 - \left(\varepsilon_1\xi_1\right)^2 - \left(\varepsilon_2\xi_2\right)^2 - \left(\varepsilon_3\xi_3\right)^2 + 2\xi_1\xi_2\xi_3,$

$$\delta_{\eta1} = \left(\varepsilon_2\varepsilon_3\right)^2 - \xi_1^2,\quad \delta_{\eta2} = \xi_1\xi_2 - \xi_3\varepsilon_3^2,\quad \delta_{\eta3} = i\left(\varepsilon_2^2\xi_2 - \xi_1\xi_3\right)$$

$$\delta_{\theta1} = \delta_{\eta2},\quad \delta_{\theta2} = \left(\varepsilon_1\varepsilon_3\right)^2 - \xi_2^2,\quad \delta_{\theta3} = i\left(\varepsilon_1^2\xi_1 - \xi_2\xi_3\right)$$

$$\delta_{r1} = -\delta_{\eta3},\quad \delta_{r2} = -\delta_{\theta3},\quad \delta_{r3} = \left(\varepsilon_1\varepsilon_2\right)^2 - \xi_3^2,$$

$$\xi_1 = 2n,\quad \xi_2 = 2\nu_0\xi_0,\quad \xi_3 = \nu_{02}\xi_0 n,$$

для P_{nj} и q_{nj} индекс $j = 1$ соответствует индексу η, $j = 2 - \theta$, $j = 3 - r$.

Для описания движения внешнего слоя оболочки и окружающей среды используем динамические уравнения теории упругости

$$\left(\frac{1}{M_{pk}^2} - \frac{1}{M_{sk}^2}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}_k + \frac{1}{M_{sk}^2}\nabla^2\mathbf{u}_k = \frac{\partial^2\mathbf{u}_k}{\partial\eta^2},\ k = 1, 2. \qquad (6)$$

Здесь и в дальнейшем индекс $k=1$ относится к среде, а $k=2$ – к внешнему слою оболочки; $M_{pk}=c/c_{pk}, M_{sk}=c/c_{sk}$ – числа Маха; $c_{pk}=\sqrt{(\lambda_k+2\mu_k)/\rho_k}$, $c_{sk}=\sqrt{\mu_k/\rho_k}$ – скорости распространения волн расширения – сжатия и сдвига в среде и внешнем слое оболочки; $\lambda_k=2\mu_k\nu_k/(1-2\nu_k)$, μ_k – модули сдвига, ν_k – коэффициенты Пуассона, ρ_k – плотности, $\mathbf{u}_k$ – векторы смещений точек пространства и внешнего слоя.

Выражая векторы смещений через потенциалы Ламе

$$\mathbf{u}_k=\operatorname{grad}\varphi_{1k}+\operatorname{rot}(\varphi_{2k}\mathbf{e}_\eta)+\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\varphi_{3k}\mathbf{e}_\eta),\ k=1,2, \tag{7}$$

преобразуем уравнения (6) к виду

$$\nabla^2\varphi_{jk}=M_{jk}^2\frac{\partial^2\varphi_{jk}}{\partial\eta^2},\ j=1,2,3,\ k=1,2, \tag{8}$$

где $M_{1k}=M_{pk}$, $M_{2k}=M_{3k}=M_{sk}$.

Выразим компоненты напряжённо-деформированного состояния оболочки и массива через потенциалы φ_{jk}.

Компоненты вектора $\mathbf{u}_k$ (7):

$$u_{rk}=\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\varphi_{3k}}{\partial\eta\partial r},$$

$$u_{\theta k}=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\theta}-\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_{3k}}{\partial\eta\partial\theta}, \tag{9}$$

$$u_{\eta k}=\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial\eta}+m_{sk}^2\frac{\partial^2\varphi_{3k}}{\partial\eta^2},$$

где $m_{sk}^2=1-M_{sk}^2$.

Используя закон Гука и соотношения (9), получаем выражения для компонент тензора напряжений

$$\sigma_{\eta\eta k}=(2\mu_k+\lambda_k M_{pk}^2)\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\eta^2}+2\mu_k m_{sk}^2\frac{\partial^3\varphi_{3k}}{\partial\eta^3},$$

$$\sigma_{\theta\theta k}=\lambda_k M_{pk}^2\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\eta^2}+\frac{2\mu_k}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\theta^2}+\frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\theta}-\frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^3\varphi_{3k}}{\partial\theta^2\partial\eta}+\frac{\partial^2\varphi_{3k}}{\partial r\partial\eta}\right),$$

$$\sigma_{rrk}=\lambda_k M_{pk}^2\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\eta^2}+2\mu_k\left(\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial\theta\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial\theta}+\frac{\partial^3\varphi_{3k}}{\partial r^2\partial\eta}\right)$$

$$\sigma_{r\eta k}=\mu_k\left(2\frac{\partial^2\varphi_{1k}}{\partial\eta\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_{2k}}{\partial\theta\partial\eta}+(1+m_{sk}^2)\frac{\partial^3\varphi_{3k}}{\partial\eta^2\partial r}\right) \tag{10}$$

Потенциалы φ*jk* также будем искать в виде периодических функций по η

$$\varphi_{jk}(r,\theta,\eta)=\Phi_{jk}(r,\theta)e^{i\xi\eta}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (8), получим

$$\nabla_2^2\Phi_{jk}-m_{jk}^2\xi^2\Phi_{jk}=0,\ j=1,2,3,\ k=1,2, \tag{12}$$

где ∇_2^2 – двумерный оператор Лапласа, $m_{jk}^2=1-M_{jk}^2$, $m_{1k}\equiv m_{pk}$, $m_{2k}=m_{3k}\equiv m_{sk}$.

В дозвуковом случае $Msk<1$ ($m2k=m3k=msk>0$, $k=1,2$), и мы приходим к известным решениям уравнений (12):

- для массива

$$\Phi_{j1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{nj}K_n(k_{j1}r)e^{in\theta}, \tag{1.13,а}$$

- для оболочки

$$\Phi_{j2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_{nj+3}K_n(k_{j2}r)+a_{nj+6}I_n(k_{j2}r)\right)e^{in\theta}, \tag{1.13,б}$$

Здесь $I_n(kr), K_n(kr)$ – функции Бесселя первого и второго рода от мнимого аргумента, $k_{j1}=|m_{j1}\xi|$, $k_{j2}=|m_{j2}\xi|$, $j=1,2,3$; $a_{n1},\ldots,a_{n9}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя (1.13,а) с учётом (11) в (9), (10), получаем формулы для вычислений компонент напряженно-деформированного состояния массива

$$u_{l1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}T_{lj1}\left(K_n(k_{j1}r)\right)e^{i(\xi\eta+n\theta)}a_{nj}, \tag{14}$$

$$\frac{\sigma_{lm1}}{\mu_1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}S_{lmj1}\left(K_n(k_{j1}r)\right)e^{i(\xi\eta+n\theta)}a_{nj},$$

где $l=r,\theta,\eta$, $m=r,\theta,\eta$;

$$T_{r11}=k_{11}K_n'(k_{11}r),\quad T_{r21}=-\frac{n}{r}K_n(k_{21}r),\quad T_{r31}=-\xi k_{31}K_n'(k_{31}r),$$

$$T_{\theta11}=\frac{n}{r}K_n(k_{11}r)i,\quad T_{\theta21}=-k_{21}K_n'(k_{21}r)i,\quad T_{\theta31}=-\frac{n}{r}\xi K_n(k_{31}r)i,$$

$$T_{\eta11}=\xi K_n(k_{11}r)i,\quad T_{\eta21}=0,\quad T_{\eta31}=-k_{31}^2K_n(k_{31}r)i$$

$$S_{rr11}=2\left(k_{11}^2+\frac{n^2}{r^2}-\frac{\lambda_1M_{p1}^2\xi^2}{2\mu_1}\right)K_n(k_{11}r)-\frac{2k_{11}K_n'(k_{11}r)}{r},\quad S_{rr21}=\frac{2n}{r^2}K_n(k_{21}r)-\frac{2k_{21}K_n'(k_{21}r)}{r},$$

$$S_{rr31}=-2\xi\left(k_{31}^2+\frac{n^2}{r^2}\right)K_n(k_{31}r)+\frac{2\xi k_{31}K_n'(k_{31}r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta 11}=-2\left(\frac{n^2}{r^2}+\frac{\lambda_1 M_{p1}^2\xi^2}{2\mu_1}\right)K_n(k_{11}r)+\frac{2k_{11}K_n'(k_{11}r)}{r},\quad S_{\theta\theta 21}=-\frac{2nK_n(k_{21}r)}{r^2}+\frac{2nk_{21}K_n'(k_{21}r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta 31}=\frac{2\xi n^2K_n(k_{31}r)}{r^2}-\frac{2\xi k_{31}K_n'(k_{31}r)}{r},\quad S_{\eta\eta 11}=-2\xi^2\left(\frac{1+\lambda_1 M_{p1}^2}{2\mu_1}\right)K_n(k_{11}r),$$

$$S_{\eta\eta 21}^{(1)}=0,\quad S_{\eta\eta 31}^{(1)}=2m_{31}^2\xi^3K_n(k_{31}r),\quad S_{r\theta 11}=\left(-\frac{2nK_n(k_{11}r)}{r^2}+\frac{2nk_{11}K_n'(k_{11}r)}{r}\right)i,$$

$$S_{r\theta 21}=\left(-\left(k_{21}^2+\frac{2n^2}{r^2}\right)K_n(k_{21}r)+\frac{2k_{21}K_n'(k_{21}r)}{r}\right)i,$$

$$S_{r\theta 31}=\left(\frac{2n\xi K_n(k_{31}r)}{r^2}-\frac{2n\xi k_{31}K_n'(k_{31}r)}{r}\right)i,$$

$$S_{\theta\eta 11}=-\frac{2n\xi K_n(k_{11}r)}{r},\quad S_{\theta\eta 21}=\xi k_{21}K_n'(k_{21}r),\quad S_{\theta\eta 31}=\frac{n\xi^2(1+m_{31}^2)K_n(k_{31}r)}{r},$$

$$S_{r\eta 11}=2\xi k_{11}K_n'(k_{11}r)i,\quad S_{r\eta 21}=-\frac{\xi nK_n(k_{21}r)i}{r},\quad S_{r\eta 31}=-\xi^2k_{31}(1+m_{31}^2)K_n'(k_{31}r)i;$$

$$K_n'(k_{j1}r)=\frac{dK_n(k_{j1}r)}{d(k_{j1}r)}.$$

Аналогично подставляя (1.13,б) в (9), (10), получаем формулы для вычислений компонент напряженно-деформированного состояния толстого слоя оболочки

$$u_{l2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}\left[T_{lj2}^{(1)}\big(K_n(k_{j2}r)\big)a_{nj+3}+T_{lj2}^{(2)}\big(I_n(k_{j2}r)\big)a_{nj+6}\right]e^{i(\xi\eta+n\theta)},$$

$$\frac{\sigma_{lm2}}{\mu_2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}\left[S_{lmj2}^{(1)}\big(K_n(k_{j2}r)\big)a_{nj+3}+S_{lmj2}^{(2)}\big(I_n(k_{j2}r)\big)a_{nj+6}\right]e^{i(\xi\eta+n\theta)}\ .\tag{15}$$

Здесь $l=r,\theta,\eta,\quad m=r,\theta,\eta$;

$$T_{r12}^{(1)}=k_{12}K_n'(k_{12}r),\quad T_{r22}^{(1)}=-\frac{n}{r}K_n(k_{22}r),\quad T_{r32}^{(1)}=-\xi k_{32}K_n'(k_{32}r),$$

$$T_{\theta 12}^{(1)}=\frac{n}{r}K_n(k_{12}r)i,\quad T_{\theta 22}^{(1)}=-k_{22}K_n'(k_{22}r)i,\quad T_{\theta 32}^{(1)}=-\frac{n}{r}\xi K_n(k_{32}r)i,$$

$$T_{\eta 12}^{(1)}=\xi K_n(k_{12}r)i,\quad T_{\eta 22}^{(1)}=0,\quad T_{\eta 32}^{(1)}=-k_{32}^2K_n(k_{32}r)i,$$

$$S_{rr12}^{(1)}=2\left(k_{12}^2+\frac{n^2}{r^2}-\frac{\lambda_2M_{p2}^2\xi^2}{2\mu_2}\right)K_n(k_{12}r)-\frac{2k_{12}K_n'(k_{12}r)}{r},$$

$$S^{(1)}_{rr22}=\frac{2n}{r^2}K_n(k_{22}r)-\frac{2k_{22}K'_n(k_{22}r)}{r},\ S^{(1)}_{rr32}=-2\xi\left(k_{32}^2+\frac{n^2}{r^2}\right)K_n(k_{32}r)+\frac{2\xi k_{32}K'_n(k_{32}r)}{r},$$

$$S^{(1)}_{\theta\theta12}=-2\left(\frac{n^2}{r^2}+\frac{\lambda_2M_{p2}^2\xi^2}{2\mu_2}\right)K_n(k_{12}r)+\frac{2k_{12}K'_n(k_{12}r)}{r},$$

$$S^{(1)}_{\theta\theta22}=-\frac{2nK_n(k_{22}r)}{r^2}+\frac{2nk_{22}K'_n(k_{22}r)}{r},\ S^{(1)}_{\theta\theta32}=\frac{2\xi n^2K_n(k_{32}r)}{r^2}-\frac{2\xi k_{32}K'_n(k_{32}r)}{r},$$

$$S^{(1)}_{\eta\eta12}=-2\xi^2\left(\frac{1+\lambda_2M_{p2}^2}{2\mu_2}\right)K_n(k_{12}r),$$

$$S^{(1)}_{\eta\eta22}=0,\quad S^{(1)}_{\eta\eta32}=2m_{32}^2\xi^3K_n(k_{32}r),\ S^{(1)}_{r\theta12}=\left(-\frac{2nK_n(k_{12}r)}{r^2}+\frac{2nk_{12}K'_n(k_{12}r)}{r}\right)i,$$

$$S^{(1)}_{r\theta22}=\left(-\left(k_{22}^2+\frac{2n^2}{r^2}\right)K_n(k_{22}r)+\frac{2k_{22}K'_n(k_{22}r)}{r}\right)i,$$

$$S^{(1)}_{r\theta32}=\left(\frac{2n\xi K_n(k_{32}r)}{r^2}-\frac{2n\xi k_{32}K'_n(k_{32}r)}{r}\right)i,$$

$$S^{(1)}_{\theta\eta12}=-\frac{2n\xi K_n(k_{12}r)}{r},\quad S^{(1)}_{\theta\eta22}=\xi k_{22}K'_n(k_{22}r),\quad S^{(1)}_{\theta\eta32}=\frac{n\xi^2(1+m_{32}^2)K_n(k_{32}r)}{r},$$

$$S^{(1)}_{r\eta12}=2\xi k_{12}K'_n(k_{12}r)i,\quad S^{(1)}_{r\eta22}=-\frac{\xi nK_n(k_{22}r)i}{r},\quad S^{(1)}_{r\eta32}=-\xi^2k_{32}(1+m_{32}^2)K'_n(k_{32}r)i;$$

$K'_n(k_{j2}r)=\dfrac{dK_n(k_{j2}r)}{d(k_{j2}r)}$; $T^{(2)}_{lj2}$, $S^{(2)}_{lmj2}$ получаются из $T^{(1)}_{lj2}$, $S^{(1)}_{lmj2}$ заменой K_n на I_n.

Для определения при фиксированном *n* девяти неизвестных коэффициентов $a_{n1},...,a_{n9}$, воспользуемся следующими граничными условиями:

при $r=R_1$ $\quad u_{j1}=u_{j2}$, $\sigma_{rj1}=\sigma_{rj2}$,

при $r=R_2$ $\quad u_{j2}=u_{0j}$, $j=r,\theta,\eta$.

Приравнивая коэффициенты рядов при $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему ($n=0,\pm1,\pm2,...$) линейных алгебраических уравнений блочно-диагонального вида, которая имеет единственное решение, если ее определитель не равен нулю.

2. Исследуем влияние скорости движения нагрузки на напряженно-деформированное состояние массива. В качестве примера рассмотрим бетонную ($\nu_0=0{,}2$, $\mu_0=1{,}21\cdot10^{10}$ Па, $\rho_0=2{,}5\cdot10^3$ кг/м^3) цилиндрическую оболочку толщиной h_0=0,002 и радиусом срединной поверхности R_2=1м, огражденную от породного массива с характеристиками $\nu_1=0{,}25$, $\mu_1=4{,}0\cdot10^9$ Па, $\rho_1=2{,}6\cdot10^3$ кг/м^3, $c_{s1}=1240{,}35$ м/с [3] слоем известняков ($\nu_2=0{,}25$, $\mu_2=2{,}8\cdot10^9$ Па, $\rho_2=2{,}65\cdot10^3$ кг/м^3; $c_{s2}=1027{,}9$м/с) толщиной 0,1м ($R_1=1{,}1$м). По внутренней поверхности оболочки с постоянной скоростью *c* движется осесимметричная нормальная периодическая ($T=2\pi$) нагрузка с амплитудой P_A, оказывающая давление на поверхность обо-

лочки в области начала подвижной системы координат. Контакт между слоями оболочки и массивом полагаем жестким.

В табл. 1 приведены числовые значения компонент напряженно-деформированного состояния массива в плоскости $\eta = 0$ при разных скоростях движения нагрузки. В таблице приняты следующие обозначения: $u^*_{r1} = u_{r1}\mu_1 / P_A$ (м), $\sigma^*_{\theta\theta 1} = \sigma_{\theta\theta 1} / P_A$, $\sigma^*_{\eta\eta 1} = \sigma_{\eta\eta 1} / P_A$.

Из таблицы следует, что с увеличением скорости движения нагрузки значения компонент НДС массива в окрестности подкрепленной двухслойной оболочкой полости возрастают.

С удалением от границы полости эффект динамического воздействия бегущей нагрузки на массив снижается, и при $r / R_1 = 4{,}0$ становится практически мало существенным при любой из рассмотренных здесь скоростей нагрузки.

Таблица 1

Компоненты НДС массива в плоскости $\eta = 0$

с, м/с	u^*_{r1}		$\sigma^*_{\theta\theta 1}$		$\sigma^*_{\eta\eta 1}$	
	r / R_1		r / R_1		r / R_1	
	1,0	4,0	1,0	4,0	1,0	4,0
200	0,33	0,01	0,45	0,0	-0,34	0,01
800	0,38	0,03	0,55	0,01	-0,43	0,02

ЛИТЕРАТУРА

1. Пожуев В.И. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строительная механика и расчет сооружений. – 1978. – № 1. – С. 44-48.

2. Львовский В.М., Онищенко В.И., Пожуев В.И. Установившиеся колебания цилиндрической оболочки в упругой среде под действием подвижной нагрузки // Сб.: Вопросы прочности пластичности. – Днепропетровск, 1974. – С. 98-110.

3. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах. – М.: Недра, 1989. – 270 с.