УДК 532.533

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ВЫВОДА УРАВНЕНИЙ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ С ИСТОЧНИКАМИ МАССЫ И ДИФФУЗИЕЙ

В.В. Рындин

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

Сұйықтық көпқұрамды ағындыларда тасымалдау теориясын физикалық шамаларының әріптік белгілері және терминдері үндестіру өткізілді. Шамалар кіргізген белгілерін пайдалануымен үзіксіздік теңдеулерін қорыту берілді.

The generalization of the designations and terms of physical magnitudes of the theory of carrying in multicomponent fluid flows is held. The inference of continuity equations with use of the entered designations of magnitudes is given.

Вводная часть. В работе [1] дан анализ уравнений неразрывности (сохранения массы) для однородных сред без внутреннего притока (стока) массы. Однако в технике встречаются случаи движения сплошной среды с непрерывным по ходу движения среды возникновением (исчезновением) вещества данного сорта за счёт, например, химической реакции превращения или вследствие изменения фазового состояния вещества (испарение движущейся жидкости с появлением в ней пузырьков пара или конденсация пара с появлением в нём жидких капель).

Величина, используемая для характеристики интенсивности источников массы, получила следующие наименования и обозначения: q – «масса флюида, поступающего (уходящего) в единицу времени в единицу объёма» [2]; r – «масса, возникающая в единице объёма в единицу времени» [3]; j_V – «плотность внутренних источников и стоков массы» [4]; J – «секундный, отнесённый к единице объёма прирост массы в данной точке потока», или «отнесённая к единице объёма секундная массовая скорость» [5]; $\dot{m}_{\grave{e}}$ – «масса, подаваемая на единицу объёма в единицу времени» [6]; κ – «изменение массы в единицу времени на единицу объёма» [7]. Как видим, обозначение и наименование данной величины ещё не установились. Заметим, что данная величина не является массой (m, кг), а является производной величиной от массы (кг/(м^3·с). Поэтому называть эту величину массой (в единице объёма в единицу времени) некорректно – это другая величина [8].

Аналогичным образом обстоит дело с наименованиями и обозначениями других величин многокомпонентных смесей, например, плотности. Так, в работе [5] уравнение неразрывности для i-го компонента смеси записывается в виде

$$\frac{\partial \rho^{(\mathrm{i})}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^{(\mathrm{i})}\mathbf{V}^{(\mathrm{i})}) = J^{(\mathrm{i})}, \qquad (1)$$

а в работе [2] –

$$\frac{\partial(\alpha_i\rho_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i\rho_i\vec{\vartheta}_i) = J_i, \qquad (2)$$

где α_i – доля объёма смеси, занимаемая фазой в данной точке.

В работе [9] уравнение диффузии записывается в виде

$$j_i = -D\frac{\partial \rho_i}{\partial n}. \qquad (3)$$

При этом величину $\rho^{(\mathrm{i})}$ в (1) называют *плотностью* i-ой компоненты (величина ρ_i в контексте к (2) никак не конкретизируется), а величину ρ_i в (3) – местной *концентрацией* данного компонента, кг/м^3. В то же время в [5] под массовой концентрацией частиц понимают безразмерную величину $\rho^{(\mathrm{i})}/\rho$. Очевидно в (1) и (2) стоят различные величины $\rho^{(\mathrm{i})}$ и ρ_i, обозначаемые практически одинаковыми символами (в последнее время верхний индекс заменяют нижним). При изучении этих разделов возникают вопросы: в чём разница между этими плотностями и, что понимается под массовой концентрацией компонента – размерная или безразмерная величина. Данная статья посвящена разрешению этих и других вопросов, а также выводу уравнений неразрывности для однородных и неоднородных сред с внутренними источниками массы.

Уравнение неразрывности для однородной среды при наличии источников (стоков) массы. Рассмотрим интегральный метод введения уравнения изменения массы для контрольного пространства (КП) конечных размеров при наличии внутри него равномерно распределённых источников (стоков) массы. Предварительно введём некоторые величины теории переноса, используемые далее.

Если через поверхность переносится вещество массой δm за время $\mathrm{d}t$, то отношение $J \equiv \dot{m} = \delta m / \mathrm{d}\, t$ называется потоком массы.

Отношение элементарного потока массы δJ, создаваемого источником (поглощаемого стоком) массы, к объёму δV источника (стока) массы называется объёмной плотностью потока массы (интенсивностью источника массы)

$$J_V = \delta J / \delta V \equiv \dot{m}_V = \delta \dot{m} / \delta V \,. \qquad (4)$$

Отношение элементарного потока массы δJ к площади площадки $\delta A_{\perp}$, расположенной перпендикулярно направлению потока, называется поверхностной плотностью потока массы (плотностью потока массы) $j \equiv J_A = \delta J / \delta A_{\perp}$.

Поверхностная плотность потока (плотность потока) рассматривается как вектор $\vec{j} = \rho \vec{c}$, что позволяет определять знак и значение потока J в зависимости от угла между этим вектором и направлением нормали $\vec{n}$ к поверхности:

$$J = \int\limits_A \vec{j} \cdot \delta \vec{A} = \int\limits_A \vec{j} \cdot \vec{n}\, \delta A = \int\limits_A j\, \delta A_{\perp} = \int\limits_A j_n\, \delta A = \int\limits_A \rho \vec{c}\, \vec{n}\, \delta A = \int\limits_A \rho \vec{c} \cdot \delta \vec{A} \qquad (5)$$

где $\delta A_{\perp} = \cos(\vec{j}, \vec{n})\, \delta A$ – проекция площади δA на плоскость, перпендикулярную вектору поверхностной плотности потока $\vec{j}$.

Чаще всего рассматривается внешняя нормаль, направленная наружу от поверхности. В этом случае скалярное произведение векторов $\vec{j} \cdot \vec{n} = j \cos(\vec{j}, \vec{n}) = j_n$ положительно для вытекающей жидкости (в этом случае $J_{\text{âûòåê}} > 0$), а втекающей жидкости – отрицательно ($J_{\text{âòåê}} < 0$).

При наличии притока вещества от источников массы изменение массы внутри КП будет происходить как за счёт внутреннего потока массы от источников массы, так и за счёт внешнего потока массы через контрольную поверхность.

Внутренний поток массы, создаваемый за счёт внутренних источников массы, с учётом (4) определится выражением

$$J_{\text{внутр}} = \int\limits_V J_V\, \delta V, \qquad (6)$$

знак которого совпадает со знаком изменения плотности внутри КП: при подводе массы плотность растёт, а при отводе – убывает.

Внешний поток массы через замкнутую контрольную поверхность определяется выражением (5)

$$J_{\text{внеш}} = -(J_{\text{втек}} + J_{\text{вытек}}) = -\oint_A \rho\, \vec{c}\, \vec{n}\, \delta A = -\oint_A \rho\, c_n\, \delta A, \qquad (7)$$

Знак минус здесь вводится для согласования знаков входящего и выходящего потоков со знаком изменения массы (плотности) внутри КП: входящий поток должен увеличивать, а выходящий уменьшать массу внутри КП.

Поскольку контрольное пространство неподвижно и его объём постоянен, то скорость изменения массы внутри КП будет определяться локальной производной от массы по времени

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial m}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, \delta V\,. \qquad (8)$$

Закон изменения массы внутри КП можно сформулировать так: *скорость изменения (приращения) массы внутри КП равна алгебраической сумме внутреннего и внешнего потоков массы* $\frac{\partial m}{\partial t} = J_{\text{внутр}} + J_{\text{внеш}}$, или с учётом (6) – (8)

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, \delta V = \int_V J_V\, \delta V - \oint_A \rho\, \vec{c}\, \delta \vec{A}\,. \qquad (9)$$

Для того чтобы получить это уравнение в дифференциальной форме, воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского, которая позволяет преобразовать интеграл по замкнутой поверхности в интеграл по объёму, ограниченному этой поверхностью: $\oint_A \rho\, \vec{c}\, \delta \vec{A} = \int_V \mathrm{div}(\rho \vec{c})\, \delta V$.

Подставляя это выражение в (9) и преобразуя, получим

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} - J_V + \mathrm{div}(\rho \vec{c})\right] \delta V = 0. \qquad (10)$$

Если плотность ρ , скорость $\vec{c}$ и их производные непрерывны, то в силу произвольности объёма V , подынтегральное выражение в (10) должно равняться нулю, т. е. мы приходим к уравнению неразрывности для потока при наличии источников (стоков) массы в дифференциальном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{c}) = J_V \equiv \dot{m}_V\,. \qquad (11)$$

Уравнение неразрывности для потока неоднородной среды. Значительные трудности возникают при строгом установлении аналогичных уравнений для *неоднородных* сред, представляющих механическую смесь разнообразных компонентов. Если все компоненты одинаковы по своему фазовому составу, то такую смесь называют *гомогенной* (иногда *многокомпонентной),* если же в смеси имеются компоненты, различающиеся друг от друга по фазе, то среда называется *гетерогенной* (иногда *многофазной).* К числу последних можно причислить, например, жидкости с твёрдыми или газовыми включениями, газы с жидкими или твердыми включениями. Неоднородные потоки получают с каждым днём все более широкие технические применения, а теория их занимает умы многочисленных учёных и инженеров. Теоретическое описание неоднородных по физическому или химическому составу потоков, независимо от того, будет ли поток гомогенным или гетерогенным, требует принятия основного допущения о сплошности всех совместно движущихся совокупностей частиц, как отдельных составляющих, так и смеси их в целом.

При изучении смесей необходимо знать количество компонента в данной точке пространства и в данный момент времени. Поэтому в анализ вводятся следующие величины.

Плотность компонента смеси (истинная плотность ρ_i^{o} [5]) – отношение массы компонента к его парциальному (приведённому, частичному) объёму V_i [10]

$$\rho_i = \frac{m_i}{V_i} = \frac{p_{\text{см}}}{R_i T} \equiv \frac{p}{R_i T}\,. \tag{12}$$

Массовая концентрация компонента смеси – отношение массы компонента к объёму смеси V [8]

$$\rho'_i = \frac{m_i}{V} = \frac{p_i}{R_i T}\,. \tag{13}$$

Эту величину называют *парциальной плотностью*, или плотностью при парциальном давлении ρ'_i [10], плотностью ρ_i [3, 4, 5, 7], т. е. большинство авторов для обозначения и наименования плотности, определяемой выражением (13), используют обозначение и наименование плотности, определяемой формулой (12), что вносит определённые трудности при рассмотрении соответствующих формул. Поскольку отношение какой-либо величины, характеризующей содержание компонента в смеси, к объёму смеси принято называть концентрацией (массовой, молярной, объёмной, молекулярной) [8], то величину, определяемую выражением (13), правильно называть *массовой концентрацией* i-го компонента (ρ_i [9]). Для обозначения массовой концентрации вводится символ плотности ρ_i, однако, чтобы подчеркнуть, что это не плотность в строгом понимании этой величины, следует использовать символ со штрихом ρ'_i.

Таким образом, отношение m/V в зависимости от того, что понимается под массой и объёмом в смеси, даёт три различные величины:

$\rho \equiv \rho_{см} = \frac{m_{см}}{V_{см}}$ – плотность смеси;

$\rho_i = \frac{m_i}{V_i}$ – плотность компонента смеси;

$\rho'_i = \frac{m_i}{V_{см}}$ – массовую концентрацию компонента смеси.

Объёмная доля компонента смеси – отношение парциального объёма компонента к объёму смеси: $r_i = V_i/V$ [10] (α_i [2, 5]).

Массовая доля компонента смеси – отношение массы компонента к массе смеси [10]

$$g_i = \frac{m_i}{m} = \frac{\rho'_i}{\rho} = \frac{\rho_i V_i}{\rho V} = \frac{r_i \rho_i}{\rho}, \tag{14}$$

Отношение $\rho'_i/\rho = g_i$ называют относительной плотностью ([4]), массовой концентрацией ($c^{(i)} = \rho^{(i)}/\rho$ [5]). Поскольку массовая концентрация является размерной величиной (кг/м^3), то долю – безразмерную величину – нельзя называть концентрацией; величину ρ'_i/ρ с некоторой долей условности можно назвать *относительной массовой концентрацией* ($m_i = \rho_i/\rho$ [9]).

Плотность смеси

$$\rho = m/V = \sum m_i/V = \sum \rho'_i = \sum \rho_i V_i/V = \sum r_i \rho_i . \tag{15}$$

В общем случае абсолютная скорость $\vec{c}_i$ (относительно стенок канала) частиц i-го компонента смеси складывается из скорости потока как целого $\vec{c}$ (переносной скорости, или скорости конвективного переноса) и скорости диффузии $\vec{c}_{дi}$ – относительной скорости этих частиц относительно потока как целого:

$$\vec{c}_i = \vec{c} + \vec{c}_{дi}. \tag{16}$$

Средняя скорость потока (скорость конвективного переноса) определяется из условия равенства суммарного импульса компонентов смеси импульсу всей смеси в целом по формуле

$$\vec{c} = \sum m_i \vec{c}_i/m = \sum \rho'_i \, \vec{c}_i/\rho. \tag{17}$$

Умножив все члены (16) на массовую концентрацию ρ'_i, получим выражение для суммарной плотности потока массы i-го компонента смеси за счёт диффузионного (молекулярного) и конвективного (макроскопического) переноса

$$\rho'_i \vec{c}_i = \rho'_i \vec{c}_{\text{дi}} + \rho'_i \vec{c} \quad \text{или} \quad \vec{j}_i = \vec{j}_{\text{дi}} + \rho'_i \vec{c} \equiv \vec{j}_{\text{дi}} + \vec{j}_{\text{кi}}, \tag{18}$$

где $\vec{j}_i = \rho'_i \vec{c}_i$ – *суммарная плотность потока массы* i-го компонента ($\vec{N}_A = \rho_A \vec{V}_A$ – компонента A [3], $\vec{j}_i$ [9]; остальные авторы эту величину не используют);

$\vec{j}_{\text{кi}} = \rho'_i \vec{c}$ – *плотность диффузионного потока* массы (диффузионная составляющая плотности потока массы) i-го компонента ($\vec{J}_A = \rho_A(\vec{V}_A - \vec{V})$ – поток массы компонента A через единичную площадку, движущуюся с гидродинамической скоростью $\vec{V}$ [3], $\vec{j}_i = \rho_i(\vec{u}_i - \vec{u})$ – плотность потока массы i-го компонента [4], $\vec{I}_i = \rho_i(\vec{\delta}_i - \vec{\delta})$ – вектор потока диффузии [7]);

$\vec{j}_{\hat{e}\mathrm{i}} = \rho'_i \vec{c}$ – *плотность конвективного потока* массы (конвективная составляющая плотности потока массы) i-го компонента смеси. Если в смеси происходят химические реакции или ионизация, то массы компонентов m_i могут изменяться. Обозначим объёмную плотность потока массы возникновения i-го компонента смеси за счёт химических реакций символом J_{Vi} (4). Величины J_{Vi} определяются в химии. Основной закон химических реакций заключается в том, что общая масса смеси остается постоянно, и поэтому

$$\sum J_{Vi} = 0. \tag{19}$$

Уравнение неразрывности i-го компонента (фазы) будет иметь ту же форму (11), что и в случае однородной среды, с той лишь разницей, что вместо ρ, $\vec{c}$ и J_V будут стоять соответственно ρ'_i, $\vec{c}_i$ и J_{Vi}:

$$\frac{\partial \rho'_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho'_i \vec{c}_i) = J_V, \text{ или } \frac{\partial \rho'_i}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}_i = J_V. \tag{20}$$

Если в (20) массовую концентрацию ρ'_i заменить плотностью i-го компонента $\rho'_i = r_i \rho_i$ (14), то уравнение (20) примет вид

$$\frac{\partial (r_i \rho_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(r_i \rho_i \vec{c}_i) = J_V. \tag{21}$$

Суммируя обе части этого уравнения по всем компонентам с учётом (15), (17) и (19), получим *уравнение неразрывности для смеси в целом*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{c}) = 0. \tag{22}$$

Вводя в уравнение (20) плотность ρ и скорость $\vec{c}$ смеси путём использования соотношений (14) $\rho'_i = g_i \rho$ и (18) $\vec{j}_i = \vec{j}_{\text{дi}} + \rho'_i \vec{c} = \vec{j}_{\text{дi}} + g_{\text{i}} \rho \vec{c}$ и преобразуя его, получим

$$\frac{\partial(\rho g_i)}{\partial t}+\mathrm{div}(g_i\rho\vec{c})=\rho\,\frac{\partial g_i}{\partial t}+g_i[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{c})]+\rho\vec{c}\cdot\mathrm{grad}\,g_i=J_и-\mathrm{div}\,\vec{j}_{дi}\,.$$

Поскольку выражение в квадратных скобках согласно (22) равно нулю, окончательно получим

$$\rho\,\frac{\partial g_i}{\partial t}+\rho\vec{c}\cdot\mathrm{grad}\,g_i=J_и-\mathrm{div}\,\vec{j}_{дi}. \qquad (23)$$

Это уравнение носит наименование уравнения сохранения массы для одного компонента смеси [3, 9], уравнения переноса массы [4],. уравнения концентрации i-го компонента [5].

В левую часть уравнения неразрывности для i-го компонента (23) входит соотношение $\frac{\partial g_i}{\partial t}+\vec{c}\cdot\mathrm{grad}\,g_i$, которое некоторые авторы [9] отождествляют с субстанциональной (индивидуальной) производной по времени для относительной концентрации i-го компонента, движущегося со скоростью $\vec{c}_i$, что не следует делать, так как $\frac{\partial g_i}{\partial t}+\vec{c}\cdot\mathrm{grad}\,g_i\neq\frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial g_i}{\partial t}+\vec{c}_i\cdot\mathrm{grad}\,g_i$. Чтобы подчеркнуть различие между индивидуальной производной, связанной с движением частиц i-го сорта, и аналогичной операцией, производимой в смеси, движущейся со скоростью $\vec{c}$, вводятся специальные обозначения: $\frac{\mathrm{d}^{(i)}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{V}^{(i)}\cdot\vec{\nabla})$ и $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})$ [5].

В правую часть (23) входят соотношения, характеризующие возникновение i-го компонента за счет физико-химических превращений и диффузию (распространение) i-го компонента в смеси. Диффузией называют самопроизвольный процесс, стремящийся к установлению внутри фаз равновесного распределения концентраций. Молекулярная диффузия имеет место и в неподвижных средах. Постепенное размывание первоначально резкой границы между двумя различными жидкостями – обычный пример молекулярной диффузии. В случае турбулентного течения макроскопический обмен благодаря турбулентному перемешиванию частиц жидкости обычно значительно превосходит обмен благодаря молекулярным (диффузионным) процессам.

В однородной по температуре и давлению смеси процесс диффузии направлен к выравниванию концентрации в системе; при этом происходит перенос вещества из области с большей в область с меньшей концентрацией.

В случае ламинарного течения смеси связь между плотностью диффузионного потока массы i-го компонента $\vec{j}_{дi}=\rho'_i\,\vec{c}_{дi}$ и градиентом его массовой концентрации $\mathrm{grad}\,\rho'_i$ устанавливается первым (градиентным) законом Фика

$$\vec{j}_{\text{дi}} = \rho'_i \, \vec{c}_{\text{дi}} = -D \operatorname{grad} \rho'_i = -D \operatorname{grad} \rho g_i, \qquad (24)$$

где D – коэффициент концентрационной диффузии, м^2/с.

Коэффициент диффузии возрастает с увеличением температуры и уменьшается с ростом давления. В бинарной смеси коэффициент диффузии будет одинаковым как для первого, так и для второго взаимно диффундирующих компонентов.

Для однородной по температуре и давлению двухкомпонентной (бинарной) смеси, а значит и однородной суммарной плотности ρ, закон Фика (24) и уравнение неразрывности (23) при наличии химических реакций запишутся так:

$$\vec{j}_{\text{дi}} = -\rho D \operatorname{grad} g_i \,,$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} + \vec{c} \cdot \operatorname{grad} g_{\text{i}} = J_{Vi}/\rho + D\nabla^2 g_{\text{i}} \,. \qquad (25)$$

Для неподвижной среды и при отсутствии источников массы уравнение (25) сводится к виду $\frac{\partial g_i}{\partial t} = D\nabla^2 g_{\text{i}}$, называемому вторым законом Фика [3].

Если температура смеси переменна, то возникает так называемая *термическая диффузия* (эффект Соре). Термодиффузия приводит к образованию градиента концентрации. Этому препятствует процесс концентрационной диффузии, стремящейся выровнять состав. В результате с течением времени может установиться стационарное состояние, при котором уравновесятся противоположные влияния термодиффузии и концентрационной диффузии.

Если в смеси имеет место градиент полного давления, то может возникнуть диффузия за счет неоднородности давления. Этот вид диффузии называют *бародиффузией.* Как и термодиффузия, бародиффузия сопровождается и обычным переносом массы, вызванным разностью концентрации.

С учетом концентрационной диффузии, термодиффузии и бародиффузии плотность диффузионного потока массы i`-го компонента описывается уравнением

$$\vec{j}_{\text{дi}} = -\rho \left(D \operatorname{grad} g_i + \frac{D_T}{T} \operatorname{grad} T + \frac{D_p}{p} \operatorname{grad} p\right), \qquad (26)$$

где D – коэффициент концентрационной диффузии, м^2/с; $D_T = k_T D$ – коэффициент термодиффузии, м^2/с; $D_p = k_p D$ – коэффициент бародиффузии, м^2/с.

Коэффициенты $k_T = D_T/D$ и $k_p = D_p/D$ называются соответственно термодиффузионным и бародиффузионным отношениями (безразмерные величины).

Первый член суммы в уравнении (26) учитывает концентрационную диффузию, второй – термодиффузию и третий – бародиффузию.

Таким образом, суммарный перенос массы какого-либо компонента путем молекулярной диффузии является следствием концентрационной диффузии, термической диффузии и бародиффузии.

Отвечая на поставленные в начале статьи вопросы относительно уравнений (1) – (3), отметим следующее. Уравнение (1) аналогично уравнению (20), уравнение (2) – (21), а уравнение (3) – (24). Следовательно, в уравнениях (1) и (3) под величинами $\rho^{(i)}$ и ρ_i следует понимать массовую концентрацию (парциальную плотность) i-го компонента ρ'_i, определяемую выражением (13), а под ρ_i в (2) – плотность (истинная) i-го компонента, определяемую выражением (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рындин В.В. Анализ методов вывода уравнений неразрывности в механике жидкости и газа //Наука и техника Казахстана. – 2009. – № 1. – С. 117 –128.

2. Басниев К.С. и др. Нефтегазовая гидромеханика: Учеб. пособие для вузов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 344 с.: ил.

3. Дэйли Дж., Харлеман Д. Механика жидкости //Пер с англ. – М.: Энергия, 1971. – 480 с.: ил.

4. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справочное пособие. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 367 с.: ил.

5 Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.: ил.

6. Самойлович Г. С. Гидрогазодинамика: Учебник для вузов. – М.: Машиностроение, 1990. – 384 с.: ил.

7. Седов А. И. Механика сплошной среды, т. 1. – М.: Наука, 1976.– 536 с.: ил

8. Стоцкий Л.Р. Физические величины и их единицы: Справ. кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1984. – 239 с.

9. Теплопередача: Учеб. для вузов /В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – 4-е изд.. – М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.: ил.

10. Техническая термодинамика: Учеб. для машин. спец. вузов /В.И. Крутов, С.И. Исаев, И.А. Кожинов и др.; Под ред. В.И. Крутова. – 3-е изд. – М.: Высш. шк., 1991. – 384 с.: ил.