УДК 624.072.24.001.24

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТОК К РАСЧЕТУ РЕБРИСТЫХ ПЛИТ

С.К. Ельмуратов

Павлодарский государственный университет им.С.Торайгырова

Жұмыста қисық сызықты тор әдісімен қабырғалы тақталардың кернеулі-деформацияланған күйі зерттеледі.

In the work intense-deformed condition of a ridge plate is investigated by a method of curvilinear grids.

Рассматривается вертикально расположенная ребристая плита, защемленная по трем сторонам и свободная по верхней кромке. На плиту действует вертикальная распределенная по верхней кромке нагрузка. Выделим из плиты плоский единичный элемент, ограниченный координатными линиями x^1,x^1+xd^1 в одном направлении и x^2,x^2+xd^2 – в другом. На рисунке 1 показаны силы, действующие на стороны элемента и вектор объемной силы $\vec{V}\,dx^1\,dx^2$.

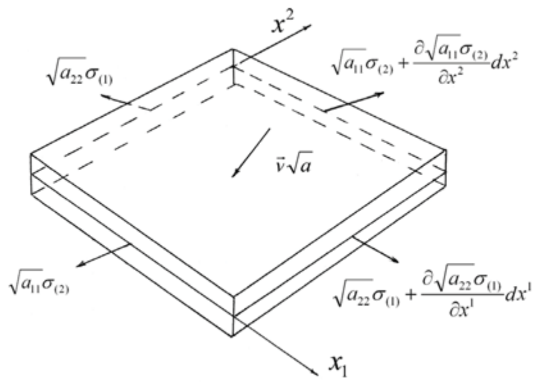

Рисунок 1 – Векторы напряжений и объемных сил элемента плиты

Для рассматриваемого плоского элемента запишем условие равенства нулю главного вектора всех сил, и после сокращения на $dx^1\, dx^2$, получим

$$\frac{\partial \sqrt{a_{22}}\, \vec{\sigma}_{(1)}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sqrt{a_{11}}\, \vec{\sigma}_{(2)}}{\partial x^2} + \sqrt{a}\, \vec{V} = 0 , \tag{1}$$

где $a_{\alpha\beta}$– компоненты метрического тензора $\grave{a}$; $\vec{\sigma}_{(\alpha)}$– физические компоненты вектора напряжений; $\vec{V}$ – вектор объемной силы. Для криволинейной системы координат удобно оперировать ковариантными или контравариантными компонентами вектора напряжений. Заменим физические компоненты $\vec{\sigma}_{(\alpha)}$ вектора напряжений через его ковариантные $\vec{\sigma}_{\alpha}$ или контравариантные $\vec{\sigma}^{\,\alpha}$ компоненты, представленные в матрице основных $\vec{e}_{\beta}$ и взаимных $\vec{e}^{\,\beta}$ локальных базисов [1-3].

$$\vec{\sigma}_{(\alpha)} = \frac{\vec{\sigma}^{\,a}}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} = \frac{\vec{\sigma}^{\,a}\sqrt{a}}{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}}; \qquad \vec{\sigma}_{(\alpha)} = \frac{\vec{\sigma}_{\alpha}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}; \quad (\alpha = 1,2; \gamma = 2,1). \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) получим

$$\frac{\partial \sqrt{a}\vec{\sigma}^{\,1}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sqrt{a}\vec{\sigma}^{\,2}}{\partial x^2} + \sqrt{a}\, \vec{V} = 0 .$$

Здесь $a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ – фундаментальный определитель метрического тензора.

Зависимость между компонентами тензоров напряжений и деформации для случая малых деформаций упругого тела, находящегося в условиях плоской задачи, подчиняется известным соотношениям закона Гука.

Для неортогональной системы координат их можно записать в виде

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\, a^{\alpha\beta} a^{\gamma\varpi} + (1-\nu)\cdot a^{\alpha\gamma} a^{\beta\omega}\right]\varepsilon_{\gamma\omega}, \tag{3}$$

Придавая индексам значения (α, β, γ, ω = 1,2) в развернутом виде окончательно получим

$$\begin{aligned}
\sigma^{11} &= \frac{E\cdot h}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{11}\, a^{11}a^{11} + \varepsilon_{22}\left(\nu\, a + a^{12}a^{21}\right) + 2\varepsilon_{12}\, a^{11}a^{12}\right] \\
\sigma^{22} &= \frac{E\cdot h}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{22}\, a^{22}a^{22} + \varepsilon_{11}\left(\nu\, a + a^{12}a^{21}\right) + 2\varepsilon_{21}\, a^{22}a^{21}\right] \\
\sigma^{12} &= \frac{E\cdot h}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{12}\left(a^{11}a^{11} + a^{12}a^{21}\right)\cdot\left(1+\nu^2\right) + \varepsilon_{11}\, a^{11}a^{12} + \varepsilon_{22}a^{22}a^{21}\right]
\end{aligned} \tag{4}$$

Касательные векторы основного локального базиса деформированной системы координат определяются по формуле

$$\vec{e}_\alpha^{\,*} = \frac{\partial \vec{\tau}^{\,*}}{\partial x^\alpha} = \vec{e}_\alpha + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\alpha} \tag{5}$$

Соответствующие им компоненты основного метрического тензора вычисляются из соотношения

$$a_{\alpha\beta}^{*} = a_{\alpha\beta} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\alpha}\cdot\vec{e}_\beta + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\beta}\cdot\vec{e}_\alpha + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\beta} \tag{6}$$

Из вариации компонент основного метрического тензора $a_{\alpha\beta}^{*}$ получим выражения компонент тензора деформаций

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(a_{\alpha\beta}^{*} - a_{\alpha\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\alpha}\cdot\vec{e}_\beta + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\beta}\cdot\vec{e}_\alpha + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\beta}\right). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (4), затем в (1) и проектируя полученные уравнения на векторы взаимного базиса $\vec{a}_a$ локальной системы координат можно получить два скалярных дифференциальных уравнения равновесия в перемещениях. Производим дискретизацию полученных дифференциальных уравнений методом криволинейных сеток для плоской задачи теории упругости.

С учетом ортотропии материала выражения для компонентов тензора напряжений и деформации примут вид

$$\sigma^{11} = \frac{E_1 \cdot h_{\tilde{n}}}{1-\nu_1\nu_2}\left[\varepsilon_{11} a^{11} a^{11} + \varepsilon_{22}\left(\nu_2 a + a^{12} a^{21}\right) + 2\varepsilon_{12} a^{11} a^{12}\right]$$

$$\sigma^{22} = \frac{E_2 \cdot h_{\tilde{n}}}{1-\nu_1\nu_2}\left[\varepsilon_{22} a^{22} a^{22} + \varepsilon_{11}\left(\nu_1 a + a^{12} a^{21}\right) + 2\varepsilon_{21} a^{22} a^{21}\right]$$

$$\sigma^{12} = 2 G h_c \left[\varepsilon_{11} a^{11} a^{12} + \varepsilon_{22} a^{22} a^{21}\right] \tag{8}$$

Выполним дискретизацию векторного уравнения (1). Рассмотрим плоскую разностную сетку (рисунок 2). Искомые функции вычисляем в определенных узлах разностной сетки, как показано на схеме, а именно: напряжения $\vec{\sigma}^{\,1}$ в узлах $(i \pm 0{,}5; j)$, $\vec{\sigma}^{\,2}$ в узлах $(i; j \pm 0{,}5)$; компоненты вектора перемещений $\vec{e}$ в основных узлах $(i; j)$ разностной сетки.

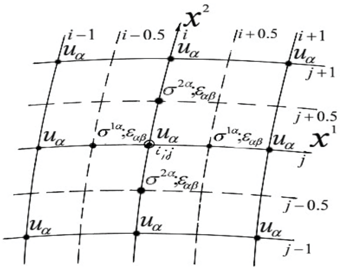

Рисунок 2 – Двумерная разностная сетка.

Применяя разностную схему непосредственно к векторным слагаемым уравнения (1), получим разностный аналог контравариантных производных вектора напряжений

$$\left[\sqrt{a}\left(\sigma^{11}\vec{a}_1+\sigma^{12}\vec{a}_2\right)\right]_{i+0,5;j}-\left[\sqrt{a}\left(\sigma^{11}\vec{a}_1+\sigma^{12}\vec{a}_2\right)\right]_{i-0,5;j}+$$
$$\left[\sqrt{a}\left(\sigma^{21}\vec{a}_1+\sigma^{22}\vec{a}_2\right)\right]_{i;j+0,5}-\left[\sqrt{a}\left(\sigma^{21}\vec{a}_1+\sigma^{22}\vec{a}_2\right)\right]_{i;j-0,5}+\left(\sqrt{a}\vec{V}\right)_{i;j}=0 \qquad (9)$$

Определим компоненты вектора перемещений $\vec{e} = \grave{e}_{a} \cdot \vec{a}^{a}$ в основных узлах (*i;j*) и произведем усреднение в промежуточных узлах (*i* ± 0,5 *;j* ± 0,5) получим

$$\vec{u}_{i\pm0,5;\,j+0,5}=\frac{1}{4}(\vec{u}_{i\pm1;\,j+1}+\vec{u}_{i\pm1;\,j}+\vec{u}_{i;\,j}+\vec{u}_{i;\,j+1})$$
$$\vec{u}_{i\pm0,5;\,j-0,5}=\frac{1}{4}(\vec{u}_{i\pm1;\,j-1}+\vec{u}_{i\pm1;\,j}+\vec{u}_{i;\,j}+\vec{u}_{i;\,j-1}) \qquad (10)$$
$$\vec{u}_{i\pm0,5;\,j}=\frac{1}{2}(\vec{u}_{i\pm1;\,j}+\vec{u}_{i;\,j}),\ \vec{u}_{i;\,j\pm0,5}=\frac{1}{2}(\vec{u}_{i;\,j}+\vec{u}_{i;\,j\pm1})$$

Разностное векторное уравнение (10) спроецируем на векторы взаимного локального базиса $\vec{a}^{a}$ в узле (*i;j*). В результате получим систему двух скалярных уравнений (*α* =1,2)

$$\begin{aligned}&\sqrt{a_{i+0,5;j}}(\sigma^{11}_{i+0,5;j}a^{\alpha i;j}_{1i+0,5;j}+\sigma^{12}a^{\alpha i;j}_{2i+0,5;j})-\\&-\sqrt{a_{i-0,5;j}}\cdot(\sigma^{11}_{i-0,5;j}\cdot a^{\alpha i;j}_{1i-0,5;j}+\sigma^{12}_{i-0,5;j}\cdot a^{\alpha i;j}_{2i-0,5;j})+\\&+\sqrt{a_{i;j+0,5}}\cdot(\sigma^{21}_{i;j+0,5}\cdot a^{\alpha i;j}_{1i;j+0,5}+\sigma^{22}_{i;j+0,5}\cdot a^{\alpha i;j}_{2i;j+0,5})-\\&-\sqrt{a_{i;j-0,5}}\cdot(\sigma^{21}_{i;j-0,5}\cdot a^{\alpha i;j}_{1i;j-0,5}+\sigma^{22}_{i;j-0,5}\cdot a^{\alpha i;j}_{2i;j-0,5})+\sqrt{a_{i;j}}V^{\beta}\cdot\delta^{\alpha}_{\beta}=0\end{aligned} \qquad (11)$$

В уравнении (11) приняты коэффициенты преобразования при переходе от узла (*i;j*) к узлу (*i* ±0,5*;j* ±0,5).

$$a^{\alpha\ i;j}_{\beta\ i\pm 0,5} = \vec{e}^{\,\alpha}_{i;j} \cdot \vec{e}_{\beta\ i\pm 0,5;\, j\pm 0,5}$$

Выполним дискретизацию деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в соответствующих узлах методом криволинейных сеток и получим разностные выражения для компонент деформации

$$\varepsilon_{11_{i+0,5;j}} = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^1} \cdot \vec{e}_1\right)_{i+0,5;j} = (\vec{u}_{i+1;j} - \vec{u}_{i;j}) \cdot \vec{e}_{1i+0,5;j} =$$

$$= [(u_\alpha \cdot \vec{e}^{\,\alpha})_{i+1;j} - (u_\alpha \cdot \vec{e}^{\,\alpha})_{i;j}] \cdot \vec{e}_{1i+0,5;j};$$

$$\varepsilon_{22_{i;j+0,5}} = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^2} \cdot \vec{e}_2\right)_{i+0,5;j} = (\vec{u}_{i+0,5;j+0,5} - \vec{u}_{i+0,5;j-0,5}) \cdot \vec{e}_{2i+0,5;j} =$$

$$= [(u_\alpha \cdot \vec{e}^{\,\alpha})_{i+0,5;j+0,5} - (u_\alpha \cdot \vec{e}^{\,\alpha})_{i+0,5;j-0,5}] \cdot \vec{e}_{2i+0,5;j};$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{21_{i+0,5;j}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \cdot \vec{e} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \cdot \vec{e}\right)_{i+0,5;j} = \frac{1}{2}\Big[(\vec{u}_{i+1;j} - \vec{u}_{i;j}) \cdot \bar{e}_{2i+0,5;j} + \\ &\Big(\vec{u}_{i+0,5;j+0,5} - \vec{u}_{i+0,5;j-0,5}\Big)\vec{e}_{1i+0,5;j}\Big] = \frac{1}{2}\Big\{\Big[(u_\alpha \cdot \vec{e}^{\,\alpha})_{i+1;j} - (u_\alpha \cdot \vec{e}^{\,\alpha})_{i;j}\Big]\times \\ &\times \vec{e}_{2i+0,5;j} + \Big[(u_\alpha \cdot \vec{e}^{\,\alpha})_{i+0,5;j+0,5} - (u_\alpha \cdot \vec{e}^{\,\alpha})_{i+0,5;j+0,5}\Big]\vec{e}_{1i+0,5;j}\Big\} \end{aligned} \quad (12)$$

Выполняя скалярное произведение базисных векторов по формулам (12) и учитывая (10) окончательно получим

$$\varepsilon_{11_{i\pm 0,5;j}} = \pm(u_{1i\pm 1;j} a^{1i\pm 1;j}_{1i\pm 0,5;j} + u_{2i\pm 1;j} a^{2i\pm 1;j}_{1i\pm 0,5;j} - u_{1i;j} a^{1i;j}_{1i\pm 0,5;j} - u_{2i;j} a^{2i;j}_{1i\pm 0,5;j});$$

$$\varepsilon_{22_{i;j\pm 0,5}} = \pm(u_{1i;j\pm 1} a^{1i;j\pm 1}_{2i;j\pm 0,5} + u_{2i;j\pm 1} a^{2i;j\pm 1}_{2i;j\pm 0,5} - u_{1i;j} \cdot^{1i;j}_{2i;j\pm 0,5} - u_{2i;j} a^{2i;j}_{2i;j\pm 0,5});$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12_{i\pm 0,5;j}} &= \frac{1}{2}[\pm(u_{1i;j\pm 1} a^{1i\pm 1;j}_{2i\pm 0,5;j} + u_{2i;j\pm 1} a^{2i\pm 1;j}_{2i\pm 0,5;j} - u_{1i;j} a^{1i;j}_{2i\pm 0,5;j} - u_{2i;j} a^{2i;j}_{2i\pm 0,5;j}) + \\ &- u_{1i\pm 1;j-1} \cdot a^{1i\pm 1;j-1}_{1i\pm 0,5;j} - u_{2i\pm 1;j} \cdot a^{2i\pm 1;j-1}_{1i\pm 0,5;j} - u_{1i;j} \cdot a^{1i;j}_{1i\pm 0,5;j} - u_{2i;j} \cdot a^{2i;j}_{1i\pm 0,5;j})]. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя последовательно (13) в (8), а затем в (1) и, проектируя полученные уравнения на векторы взаимного базиса $\mathring{\vec{a}}_a$ локальной системы координат, получим систему двух скалярных уравнений в перемещениях и, дополнив их граничными условиями, получаем разрешающую систему уравнений плоской задачи.

Исследовано напряженно-деформированное состояние ребристой плиты-панели при действии нагрузки вертикально приложенной в срединной плоскости. Подобрано расположение ребер, их размеры и размеры плиты, соответствующие наименьшему напряженно-деформированному состоянию плиты-панели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ельмуратов С.К. Уравнения равновесия и движения тонких оболочек и пластин и их численная реализация. // Наука и техника Казахстана, Павлодар, №1, 2005. – С. 24-33.

2. Ельмуратов С.К. Расчет тонких оболочек и пластин на устойчивость и динамику. //Вестник ПГУ, серия физико-математическая.- Павлодар, ПГУ, №3, 2005. – С. 43-51.

3. Ельмуратов С.К. Исследование устойчивости и колебаний тонких оболочек и пластин методом криволинейных сеток. // Поиск, серия естественных и технических наук.- Алматы, №4. 2005. – С. 312-317.

4. Пред. патент. 1649. РК. Комплексные добавки для бетонной смеси. /Ш.К. Торпищев., С.К. Ельмуратов и др. 15.11.2005. Бюл. № 11.– С. 3 с.