В.В. Рындин
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

УДК 532.533

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ ТЕРМИНОВ И ОБОЗНАЧЕНИЙ ВЕЛИЧИН, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ИНТЕНСИВНОСТЬ ПОТОКОВ ВЕЩЕСТВА И ДВИЖЕНИЯ (ЭНЕРГИИ)

Тасымал теориясының олардың белгілерінің және физикалық шамаларының терминдерінің жүйелеуі өткізілді. Шамалар ағындары мен векторларының скалярлық ағындары арасында бір мағыналы байланыс анықталды. Ашық қозғалмайтын жүйе және жылжымалы жабық жүйе үшін тасымалдың баланстық теңдеулерін алды.

The systematization of the terms of physical magnitudes of the theory of transposition and their labels is conducted. The unique relation between streams of magnitudes and scalar streams of vectors is established(installed). The balance equations of transposition for an open fixed system and for moving closed system in a generalized aspect are obtained.

Введение. Все явления, протекающие в природе, связаны с потоками материи и её свойства – движения. Потоки вещества рассматриваются в механике жидкости и газа [1 – 4], потоки тепла (хаотического движения) – в теории теплообмена [5], а всевозможные процессы обмена веществом и движением – в термодинамике необратимых процессов (термодинамике неравновесных систем) [6].

Для описания реальных потоков вводятся понятия *потоков физических величин* и *скалярных потоков векторов*. Однако связь между этими характеристиками реальных потоков раскрывается лишь для отдельных случаев и не всегда должным образом. В настоящее время отсутствует унификация терминов и буквенных обозначений величин, используемых для описания реальных потоков. Так, в частности, величина, используемая для характеристики интенсивности источников массы, получила следующие наименования и обозначения: J – «отнесённая к единице объёма секундная массовая скорость» [2]; $\dot{m}_{è}$ – «масса, подаваемая на единицу объёма в единицу времени» [3]; κ – «изменение массы в единицу времени на единицу объёма» [4]; σ – «плотность источника или стока» [6].

Заметим, что данная величина не является массой (m , кг), а является производной величиной от массы (кг/(м^3·с). Поэтому называть эту величину массой (в единице объёма в единицу времени) некорректно. Аналогичным образом обстоит дело с наименованиями и обозначениями других величин теории переноса. Это создаёт значительные трудности при изучении соответствующих дисциплин, особенно это касается термодинамики неравновесных систем (ТНС). Цель данной работы – дать основы теории переноса, систематизировать термины и обозначения величин в соответствии с уравнениями связи для них.

Основные величины теории переноса. Обозначим общим символом B величины, характеризующие запас (количество) вещества ($B = m, N, \mu \ldots$) или движения ($B = E, m\vec{c}, \vec{L} \ldots$) в некоторой области пространства. Производные величины, получаемые от деления основной величины на массу, объём, количество вещества, принято называть соответственно *удельными*, *объёмными*, *молярными* величинами:

$$b \equiv B_m = \delta B/\delta m; \quad b' \equiv B_V = \delta B/\delta V = \rho b; \quad B_i = \delta B/\delta\mu,$$

где δB – элементарная величина B, характеризующая некоторое свойство среды (системы) объёмом δV, массой $\delta m = \rho\delta V$ и количеством вещества $\delta\mu$.

Например, $e \equiv E_m = \delta E/\delta m$ – удельная энергия, Дж/кг; $h = \delta H/\delta m$ – удельная энтальпия, Дж/кг; $s = \delta S/\delta m$ – удельная энтропия, Дж/(кг·К); $\tilde{o} = \delta V/\delta m = 1/\rho$ – удельный объём, м^3/кг;

$\rho \equiv m_V = \delta m/\delta V$ – плотность (объёмная масса), кг/м^3; $h' = \delta H/\delta V = \rho h$ – объёмная энтальпия, Дж/м^3; $s' \equiv S_V = \delta S/\delta V = \rho s$ – объёмная энтропия, Дж/(м^3·К); $e' \equiv E_V = \delta E/\delta V = \rho e$ – объёмная энергия, Дж/м^3; $e'_k = \delta E_k/\delta V = \rho c^2/2$ – объёмная кинетическая энергия, Дж/м^3; $\vec{K}_V \equiv \delta\vec{K}/\delta V = \rho\vec{c}$ – объёмный импульс, кг/(с·м^2); $V_V = \delta V/\delta V = 1$ – «объёмный объём» – безразмерная величина, равная единице;

$H_\mu = \delta H/\delta\mu$ – молярная энтальпия, Дж/моль.

Если через поверхность переносится свойство, характеризуемое величиной B, в количестве δB за время $\mathrm{d}t$, то их отношение

$$J_B \equiv \dot{B} = \delta B/\mathrm{d}t \tag{1}$$

характеризует интенсивность потока субстанции и называется *потоком величины* B (слово «поток» в термине и точка в символе $\dot{B}$ указывают на то, что эта величины получена от деления основной величины B на время). Например, $J \equiv \dot{m} = \delta m/\mathrm{d}t$ – *поток массы*, кг/с; $\dot{V} = \delta V/\mathrm{d}t$ – *поток объёма*, м^3/с; $J_S \equiv \dot{S} = \delta S/\mathrm{d}t$ – *поток энтропии*, Вт/К; $J_E \equiv \dot{E} = \delta E/\mathrm{d}t$ – *поток энергии*, Вт; $J_W \equiv P \equiv N \equiv \dot{E}_{\text{УФ}} == \delta E_{\text{УФ}}/\mathrm{d}t = \delta W/\mathrm{d}t = \dot{W}$ – *мощность*, *поток работы* ($\dot{W}$, Вт) – поток энергии в упорядоченной форме (УФ); $J_Q \equiv \Phi \equiv \dot{E}_{\text{ХФ}} = \delta E_{\text{ХФ}}/\mathrm{d}t \equiv \delta Q/\mathrm{d}t = \dot{Q}$ – *тепловой поток*, *поток теплоты* ($\dot{Q}$, Вт) – поток энергии в хаотической форме (ХФ).

Отношение потока $\dot{B}$ к длине, площади, объёму тела принято называть соответственно *линейной, поверхностной, объёмной плотностью потока величины* B:

$$\dot{B}_l = \delta\dot{B}/\delta l, \quad j_B = \delta J_B/\delta A_\perp \equiv \dot{B}_A = \delta\dot{B}/\delta A_\perp, \quad J_V \equiv J_V^B = \delta J_B/\delta V \equiv \dot{B}_V = \delta\dot{B}/\delta V,$$

где $\delta A_{\perp}$ – проекция площади δA на плоскость, перпендикулярную направлению потока.

Например, если внутри цилиндрической трубы длиной l, площадью боковой поверхности A и объёмом V выделяется тепловой поток $\hat{O} = \delta Q/\mathrm{d}\,t$, то *линейная, поверхностная и объёмная плотности теплового потока* определятся выражениями: $\Phi_{l} \equiv \Phi/l$, Вт/м; $j_{Q} \equiv \varphi \equiv \Phi_{A} = \Phi/A$, Вт/м^2; $J_{V}^{Q} \equiv \Phi_{V} \equiv \Phi/V$, Вт/м^3.

Поверхностная плотность потока массы $j \equiv j_m = \delta J/\delta A_{\perp} = \delta \dot{m}/\delta A_{\perp}$, кг/(с·м^2).

Объёмную плотность потока, создаваемого источником (поглощаемого стоком), принято называть *интенсивностью внутренних источников* (стоков)

$$J_V \equiv J_{V\text{â.è}} = \delta J_{\text{â.è}}/\delta V \equiv \dot{B}_{V\text{â.è}} = \delta \dot{B}_{\text{â.è}}/\delta V\,. \tag{2}$$

Поверхностная плотность потока (*плотность потока*) рассматривается как *вектор* $\vec{j}_B \equiv \vec{\dot{B}}_A$, что позволяет определять знак и значение потока $\dot{B}$ в зависимости от угла между этим вектором и направлением нормали к поверхности $\vec{n}$:

$$\delta J_B \equiv \delta \dot{B} = \vec{j}_B \cdot \delta \vec{A} = \vec{j}_B \cdot \vec{n}\,\delta A = j_B\,\delta A_{\perp}\,, \tag{3}$$

где $\delta A_{\perp} = \cos(\vec{j}_B, \vec{n})\,\delta A$ – проекция площади δA на плоскость, перпендикулярную вектору поверхностной плотности потока $\vec{j}_B$.

Отсюда определяется модуль вектора $\vec{j}_B$ (знаки δJ_B и $\delta A_{\perp}$ совпадают)

$$\left|\vec{j}_B\right| = j_B = \delta J_B/\,\delta A_{\perp}\,. \tag{4}$$

Таким образом, модуль вектора поверхностной плотности потока какой-либо величины B равен отношению потока этой величины к площади площадки, расположенной перпендикулярно направлению потока.

Интегрируя (3), получим выражение для потока $J_B \equiv \dot{B}$ через всю площадку A

$$J_B \equiv \dot{B} = \int_A \vec{j}_B \cdot \delta \vec{A} = \int_A \vec{j}_B \cdot \vec{n}\,\delta A = \int_A j_B\,\delta A_{\perp}\,. \tag{5}$$

Перенос движения (импульса, энергии) через поверхность может осуществляться как совместно с переносом вещества ($J_B^{\text{ïåð.âåù}} \equiv J_B^{\text{êîíâ}}$), так и без переноса вещества ($J_B^{\text{á.ïåð.âåù}}$): $J_B = J_B^{\text{ïåð.âåù}} + J_B^{\text{á.ïåð.âåù}} \equiv J_B^{\text{êîíâ}} + J_B^{\text{á.ïåð.âåù}}$.

Например, перенос тепла (ХД) в жидкой среде может осуществляться как за счёт переноса самой жидкой среды из области с одной температурой в область с другой температурой (такой перенос тепла называется *конвекцией*), так и без переноса вещества в неподвижной жидкости и в твёрдых телах (такой процесс переноса тепла называется *теплопроводностью*); изменение энергии системы может происходить как за счёт переноса массы, так и за счёт подвода тепла и совершения работы. Следовательно, поток энергии J_E будет складываться из потока переноса энергии конвекцией $J_E^{\text{êîíâ}}$, потока энергии за счёт совершения работы $J_E^{\text{ñîâ. ðàá}} \equiv J_W$ и потока энергии за счёт теплообмена $J_E^{\text{òåïë}} \equiv J_Q$:

$$J_E = J_E^{\text{ïåð.âåù}} + J_E^{\text{á.ïåð.âåù}} \equiv J_E^{\text{êîíâ}} + J_W + J_Q.$$

Аналогичным образом, вектор поверхностной плотности потока $\vec{j}_B$ будет складываться из векторов, характеризующих перенос субстанции с переносом вещества и без переноса вещества,

$$\vec{j}_B = \vec{j}_B^{\text{ïåð.âåù}} + \vec{j}_B^{\text{á.ïåð.âåù}} \equiv \vec{j}_B^{\text{êîíâ}} + \vec{j}_B', \qquad (6)$$

где $\vec{j}_B'$ – вектор поверхностной плотности потока без переноса вещества.

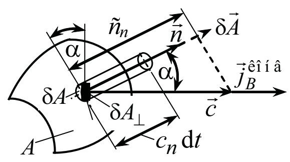

Рисунок 1

Определим конвективную составляющую вектора поверхностной плотности потока, связанную с переносом вещества. Для этого выделим в подвижной среде малый элемент поверхности, характеризуемый вектором площади $\delta\vec{A} = \vec{n}\,\delta A$ (рис. 1).

Пусть подвижная среда протекает через эту площадку со скоростью $\vec{c}$ под углом α к направлению единичного вектора $\vec{n}$ нормали. Скорость среды в направлении нормали определится проекцией скорости $\vec{c}$ на нормаль: $c_n = c\cos\alpha = \vec{c}\cdot\vec{n}$. За время $\mathrm{d}t$ через элементарную площадку пройдёт среда объёмом

$$\delta^2 V = c_n\,\mathrm{d}t\,\delta A = \vec{c}\cdot\vec{n}\,\delta A\,\mathrm{d}t = \vec{c}\cdot\delta\vec{A}\,\mathrm{d}t$$

и перенесёт с собой свойство, характеризуемое величиной B, в количестве

$$\delta^2 B = B_V\,\delta^2 V = B_V\,c_n\,\delta A\,\mathrm{d}t = B_V\,\vec{c}\cdot\vec{n}\,\delta A\,\mathrm{d}t = B_V\,\vec{c}\cdot\delta\vec{A}\,\mathrm{d}t. \qquad (7)$$

Элементарный поток свойства, характеризуемого величиной B (коротко *поток свойства* B), за счёт конвекции определится выражением (1) с учётом (7)

$$\delta J_B^{\text{êîíâ}} \equiv \delta\dot{B}_{\text{êîíâ}} = \delta(\delta B/\mathrm{d}\,t) = B_V\,c_n\,\delta A = B_V\,\vec{c}\cdot\vec{n}\,\delta A = B_V\,\vec{c}\cdot\delta\vec{A}.$$

Поскольку для конвективного потока справедлива и общая формула (3), то получим окончательно

$$\delta J_B^{\text{êîíâ}} = B_V\,c_n\,\delta A = B_V\,\vec{c}\cdot\vec{n}\,\delta A = \rho b\vec{c}\cdot\delta\vec{A} = \vec{j}_B^{\text{êîíâ}}\cdot\delta\vec{A} = \vec{j}_B^{\text{êîíâ}}\cdot\vec{n}\,\delta A = j_B^{\text{êîíâ}}\,\delta A_\perp, \qquad (8)$$

где $\delta A_\perp = \delta A\cos\alpha$ – проекция площади δA на плоскость, перпендикулярную направлению потока.

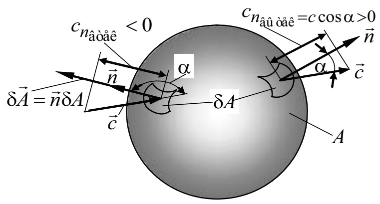

Рисунок 2

Как следует из формулы (8) $\delta J_B^{\text{êîíâ}}$ [как и $\delta\dot{B} \equiv \delta J_B$ в (3)] – алгебраическая величина, знак которой «автоматически» определяется скалярным произведением вектора скорости $\vec{c}$ и вектора единичной нормали $\vec{n}$ к поверхности переноса. Чаще всего рассматривается внешняя нормаль, направленная наружу от поверхности (рис. 2). В этом случае скалярное произведение векторов скорости и нормали $\vec{c}\cdot\vec{n} = c\cos\alpha = c_n$ положительно для вытекающей жидкости (в этом случае угол α между направлением скорости и нормали острый и косинус угла положителен), а втекающей жидкости – отрицательно (в этом случае угол α тупой и косинус угла отрицателен). Следовательно, $\dot{B}_{\text{âòåê}} < 0$, а $\dot{B}_{\text{âûòåê}} > 0$.

Из (8) следует выражение для вектора поверхностной плотности конвективного потока

$$\vec{j}_B^{\text{êîíâ}} = B_V\vec{c} = \rho b\vec{c}\,. \tag{9}$$

Тогда выражение (6) с учётом (9) может быть записано в виде

$$\vec{j}_B = \vec{j}_B^{\text{ïåð.âåù}} + \vec{j}_B^{\text{á.ïåð.âåù}} \equiv \vec{j}_B^{\text{êîíâ}} + \vec{j}_B^{\,\prime} = B_V\vec{c} + \vec{j}_B^{\,\prime} = \rho b\vec{c} + \vec{j}_B^{\,\prime}\,. \tag{10}$$

Откуда находится вектор поверхностной плотности потока свойства B без переноса вещества

$$\vec{j}_B^{\,\prime} \equiv \vec{j}_B^{\text{á.ïåð.âåù}} = \vec{j}_B - B_V\vec{c} = \vec{j}_B - \rho b\vec{c}\,.$$

Интегрируя (8), получим выражение для конвективного потока свойства B через всю площадь поверхности A

$$J_B^{\text{êîíâ}} = \int_A \vec{j}_B^{\text{êîíâ}}\cdot\delta\vec{A} = \int_A B_V\vec{c}\cdot\vec{n}\,\delta A = \int_A \rho b\vec{c}\cdot\vec{n}\,\delta A = \int_A \rho b\;{}_n\,\delta A\,. \tag{11}$$

В векторном анализе вводится понятие ***потока вектора*** $\vec{a}$ (в нашем случае это $\vec{j}_B$ и $\vec{j}_B^{\text{êîíâ}}$) *сквозь поверхность* A (вообще говоря, незамкнутую), определяемого как ***скалярную величину***

$$F(\vec{a}) = \int_A \vec{a}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = \int_A a\cos(\vec{a},\vec{n})\,\mathrm{d}A = \int_A a_n\,\mathrm{d}A = \int_A (n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z)\,\mathrm{d}A\,, \tag{12}$$

где n_x, n_y, n_z – направляющие косинусы нормали к площадке A.

Формула *Гаусса-Остроградского* устанавливает связь поверхностного интеграла по замкнутой поверхности с объёмным интегралом

$$\oint_A \vec a \cdot \vec n\, \mathrm{d}A = \oint_A a_n\, \mathrm{d}A = \int_V \mathrm{div}\,\vec a\, \mathrm{d}V \cdot \qquad (13)$$

Переходя от поверхностного интеграла к объёмному интегралу по формуле Гаусса-Остроградского (13) выражения для полного потока (5) и конвективного потока (11) через замкнутую поверхность (см. рис. 2) примут соответственно вид:

$$J_B \equiv \dot B = J_B^{\text{ïåð.âåù}} + J_B^{\text{á.ïåð.âåù}} = \oint_A \vec j_B \cdot \delta\vec A = \int_V \mathrm{div}\,\vec j_B\, \delta V \,; \qquad (14)$$

$$J_B^{\text{êîíâ}} = \oint_A \vec j_B^{\text{êîíâ}} \cdot \delta\vec A = \int_V \mathrm{div}\,\vec j_B^{\text{êîíâ}}\, \delta V = \int_V \mathrm{div}(B_V\,\vec c)\,\delta V = \int_V \mathrm{div}(\rho b\vec c)\,\delta V \cdot \qquad (15)$$

Согласно этим выражениям скалярные потоки векторов $\vec j_B$ и $\vec j_B^{\text{êîíâ}}$ через замкнутую поверхность равны интегралам от дивергенции этих векторов, распространённых на объём внутри этой поверхности.

Приведём примеры применения уравнения (11) к конвективным потокам:

– для *потока энергии* (Вт) – *потока вектора* $\vec j_E^{\text{êîíâ}} = E_V\,\vec c = \rho e\,\vec c$)

$$\dot E_{\text{êîíâ}} = \delta E_{\text{êîíâ}}/\mathrm{d}\,t = \int_A \vec j_E^{\text{êîíâ}} \cdot \delta\vec A = \int_A E_V\,\vec c\cdot\vec n\,\delta A = \int_A \rho e\,\vec c\cdot\vec n\,\delta A = \int_A E_V\, c_n\,\delta A\,,$$

где ρ – плотность среды; e – удельная энергия;

– для потока кинетической энергии (Вт)

$$\dot E_k = \int_A E_{V_k}\, c_n\,\delta A = \int_A (\rho c^2/2)\, c_n\,\delta A\,;$$

– для *потока волновой энергии* (Вт) – *потока* ***вектора Умова*** $\vec U = w\vec c = \vec j_E^{\text{âîëí}}$ (вектора поверхностной плотности потока волновой энергии $\vec j_E^{\text{âîëí}}$)

$$\dot E_{\text{âîëí}} = \int_A \vec j_E^{\text{âîëí}} \cdot \delta\vec A = \int_A E_V^{\text{âîëí}}\,\vec c\cdot\vec n\,\delta A = \int_A \vec U\cdot\delta\vec A\,,$$

где $w \equiv E_V^{\text{âîëí}}$ – объёмная энергия волны; $\vec c$ – скорость переноса энергии волной (согласно этому уравнению, *поток волновой энергии* через произвольную поверхность, мысленно проведённую в среде, охваченной волновым движением, равен *потоку вектора Умова* через эту поверхность [7]);

– для *потока энтропии* (Вт/К) – *потока* ***вектора энтропии*** $\vec S = \rho s\vec c$ (вектора поверхностной плотности конвективного потока энтропии $\vec j_S^{\text{êîíâ}}$)

$$\dot S_{\text{êîíâ}} = \delta S_{\text{êîíâ}}/\mathrm{d}\,t = \int_A \vec j_S^{\text{êîíâ}} \cdot \delta\vec A = \int_A S_V\,\vec c\cdot\vec n\,\delta A = \int_A \rho s\,\vec c\cdot\vec n\,\delta A = \int_A s'\, c_n\,\delta A\,;$$

– для *потока импульса* – для *силы* (кг·м/с^2 = Н)

$$\vec{F} \equiv \dot{\vec{K}} \equiv \delta\vec{K}/\delta t = \int_A \vec{K}_V\, c_n\, \delta A = \int_A \rho\vec{c}\, c_n\, \delta A\,;$$

– для *потока массы* (кг/с) – *потока* ***вектора массовой скорости*** $\rho\vec{c}$ (вектора поверхностной плотности потока массы $\vec{j}$);

$$J \equiv \dot{m} = \delta m/\delta t = \int_A \vec{j}\cdot\delta\vec{A} = \int_A m_V\,\vec{c}\cdot\vec{n}\,\delta A = \int_A \rho\,\vec{c}\cdot\vec{n}\,\delta A = \int_A \rho\, c_n\,\delta A = \int_A \rho\, c\,\delta A_\perp\,; \qquad (16)$$

– для *потока объёма* (м^3/с) – *потока* ***вектора скорости*** $\vec{c}$

$$\dot{V} = \delta V/\delta t = \int_A V_V\,\vec{c}\cdot\vec{n}\,\delta A = \int_A \vec{c}\cdot\vec{n}\,\delta A = \int_A c_n\,\delta A = \int_A c\,\delta A_\perp\,.$$

Термин «поток объёма» в литературе заменяется термином «объёмный расход». Однако это не эквивалентная замена, так как объёмный расход V_t и массовый расход m_t, в отличие от потока объёма и потока массы, являются всегда положительными величинами, определяемыми как абсолютные значения соответствующих потоков: $V_t \equiv |\dot{V}|$, $m_t \equiv |\dot{m}|$.

Вектор поверхностной плотности потока массы (*вектор плотности потока массы*), определяемый по общей формуле (9) с учётом $b = m/m = 1$

$$\vec{j} \equiv \vec{\dot{m}}_A \equiv \vec{J}_A = \rho\,\vec{c}\,, \qquad (17)$$

в соответствии с общим понятием *потока вектора* (12) называют *вектором массовой скорости*, а его модуль, определяемый в соответствии с (4)

$$|\,\vec{j}\,| \equiv |\,\rho\vec{c}\,| \equiv j \equiv \rho c = \delta\dot{m}/\delta A_\perp\,,$$

– *удельным расходом, плотностью тока, плотностью потока*.

Для потока массы через замкнутую поверхность выражение (16) с учётом формулы Гаусса-Остроградского (13) примет вид

$$\dot{m} = \oint_A \vec{j}\,\delta\vec{A} \equiv \oint_A (\rho\,\vec{c})\,\delta\vec{A} = \int_V \mathrm{div}(\rho\vec{c})\,\delta V \equiv \int_V \frac{\partial(\rho c_i)}{\partial x_i}\,\delta V\,,$$

а для потока объёма (потока вектора скорости) –

$$\dot{V} = \oint_A \vec{c}\,\delta\vec{A} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{c}\,\mathrm{d}V \equiv \int_V \frac{\partial c_i}{\partial x_i}\,\delta V\,.$$

Из приведённых примеров следует, что понятие *потока* (какой-либо) *величины* (B) вытекает из уравнения связи $\dot{B} = \delta B/\delta t$ и поэтому является менее абстрактным по сравнению с понятием *потока* (какого-либо) *вектора* ($\vec{a}$), наименование и обозначение которого зачастую является отвлечённым (вектор Умова $\vec{U}$, вектор массовой скорости $\rho\vec{c}$, и др.), а зачастую своим обозначением и наименованием дезориентируют читателя (например, обозначение вектора энтропии $\vec{S}$, Вт/(м²/К), совпадает с обозначением энтропии тела, Дж/К).

Примеры применения уравнения (5) к процессам переноса свойства среды без результирующего переноса вещества в каком-либо направлении:

– для *потока тепла* (теплоты), *теплового потока* – потока движения (энергии) в хаотической форме (Вт)

$$J_Q \equiv \Phi \equiv \dot{E}_{\text{ХФ}} = \delta E_{\text{ХФ}}/\mathrm{d}t \equiv \delta Q/\mathrm{d}t = \int_A \vec{j}_Q \cdot \delta\vec{A} = \int_A \vec{\varphi} \cdot \delta\vec{A} = \int_A \varphi\, \delta A_\perp,$$

где $\vec{j}_Q \equiv \vec{\varphi}$ – *вектор поверхностной плотности теплового потока* (Вт/м²), направленный по нормали к изотермической поверхности площадью $\delta A_\perp$;

– для *потока электрического заряда* (Кл/с) – *силы электрического тока* (А)

$$I \equiv \dot{Q}_{\text{ý}} = \delta Q_{\text{ý}}/\mathrm{d}\, t = \int_A \vec{j}_{\text{ý}}\, \delta\vec{A},$$

где $\vec{j}_{\text{ý}}$ – *вектор поверхностной плотности потока заряда* (вектор плотности электрического тока), А/м².

Балансовое уравнение изменения величины B, характеризующей состояние среды внутри неподвижной области пространства. Пусть некоторая неподвижная область пространства объёмом V содержит среду со свойством, характеризуемым величиной B. Количество свойства B в этом объёме будет

$$B = \int_V B_V\, \delta V \cdot$$

Изменение этого количества во времени происходит за счёт потока свойства (с переносом и без переноса вещества) через замкнутую поверхность[1] площадью A, определяемого по формуле (14)

$$J_B \equiv \dot{B} = J_B^{\text{ïåð.âåù}} + J_B^{\text{á.ïåð.âåù}} = \oint_A \vec{j}_B \cdot \delta\vec{A} = \int_V \mathrm{div}\, \vec{j}_B\, \delta V, \qquad (18)$$

а в общем случае и за счёт потока от внутренних источников (стоков), определяемого в виде объёмного интеграла от объёмной плотности потока $J_V = \dot{B}_{V\text{â.è}}$ (2),

$$J_B^{\text{â.è}} = \int_V J_V\, \delta V \equiv \dot{B}_{\text{â.è}} = \int_V \delta\dot{B}_{\text{â.è}} = \int_V \dot{B}_{V\text{â.è}}\, \delta V \cdot \qquad (19)$$

Поскольку поток через поверхность, определяемый выражением (18), положителен при «вытекании» свойства через неподвижную поверхность, а поток, определяемый выражением (19), положителен в результате «притока» свойства от внутренних источ-

[1] Такую поверхность, выделенную в пространстве и проницаемую для различных потоков (с переносом и без переноса вещества), принято называть **контрольной поверхностью** (КП).

ников, то балансовое уравнение для скорости изменения величины B, характеризующей состояние среды внутри неподвижной области пространства. запишется в виде (знак дифференцирования внесён под знак интеграла, так как объём постоянен)

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \int\limits_V \frac{\partial B_V}{\partial t}\,\delta V = -J_B + J_{\text{â.è}} = -\oint\limits_A \vec{j}_B \cdot \delta\vec{A} + \int\limits_V J_V\,\delta V = -\int\limits_V \operatorname{div}\vec{j}_B\,\delta V + \int\limits_V J_V\,\delta V\,, \tag{20}$$

Поскольку объём можно выбрать произвольно, то из (20) следует дифференциальное уравнение баланса для величины B в *неподвижной* области пространства

$$\frac{\partial(\delta B)}{\partial t\,\delta V} = \frac{\partial B_V}{\partial t} = \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{j}_B + J_V = -\operatorname{div}(\rho b\vec{c}) - \operatorname{div}\vec{j}'_B + J_V\,, \tag{21}$$

где вектор поверхностной плотности потока $\vec{j}_B$ определяется выражением (10).

Уравнение (21), записанное в общем виде, позволяет уточнить запись, используемых в теории переноса уравнений. Так, в работе [6] без вывода приводится аналогичное уравнение в виде

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{J}_G + \sigma_G \tag{22}$$

и отмечается, что величина G *подчиняется уравнению баланса* и даже выполняется *закон сохранения свойства* G. В этой же работе вводится величина $\delta Q = G\,\delta V$, следовательно, $G = Q_V = \delta Q/\delta V$ – объёмная величина, для которой закон сохранения не выполняется (закон сохранения может выполняться для Q).

В соответствии с (21) точная запись балансового уравнения (22) для величины Q будет иметь вид

$$\frac{\partial(\delta Q)}{\partial t\,\delta V} = \frac{\partial Q_V}{\partial t} \equiv \frac{\partial G}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{J}_Q + \sigma_Q\,.$$

В векторном анализе выводится важная формула дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объёму $V = V(t)$, которая в дальнейшем используется для получения различных балансовых уравнений для подвижного элемента среды. Рассмотрим метод вывода этой формулы (с некоторыми сокращениями и пояснениями) на примере работы [4].

Рассмотрим в движущейся среде в момент времени t конечный элемент сплошной среды (систему) объёмом V и поверхностью A. В момент $t + \Delta t$ этот элемент среды займт область пространства, объёмом V' и поверхностью A'. Пусть состояние в любой точке системы и в любой момент времени задано объёмной величиной $B_V = \delta B/\delta V$), т. е. задано поле величины $B_V(x, y, z, t) = B_V(\vec{r}, t)$. Если разбить всю систему на элементарные подсистемы, состояния которых характеризуются величинами $\delta B = B_V \delta V$, то количество свойства, характеризуемого величиной B, для всей подвижной системы объёмом V

определится интегралом $B = \int\limits_{V(t)} B_V(x,y\ z\ t)\delta V = \int\limits_{V(t)} B_V(\vec{r},t)\delta V$. Вычислим полную производную от этого интеграла с учётом того, что от t зависит не только подынтегральная функция, но и область интегрирования V :

$$\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V(t)} B_V(x,y,z,t)\delta V = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int\limits_{V'} B_V(x+\Delta x, \mathrm{y}+\Delta y, \mathrm{z}+\Delta z, t+\Delta t)\delta V - \int\limits_{V} B_V(x,\mathrm{y},\mathrm{z},t)\delta V}{\Delta t} \equiv$$

$$\equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int\limits_{V}[B_V(\vec{r},t+\Delta t) - B_V(\vec{r},t)]\delta V + \int\limits_{V'} B_V(\vec{r}+\Delta\vec{r},t+\Delta t)\delta V - \int\limits_{V} B_V(\vec{r},t+\Delta t)\delta V}{\Delta t} =$$

$$= \int\limits_{V}\frac{\partial B_V(\vec{r},t)}{\partial t}\delta V + \oint\limits_{A} B_V c_n\,\delta A = \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{\text{лок}} + \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{\text{конв}} = \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{\text{лок}} + \dot{B}_{\text{конв}} = \frac{\partial B}{\partial t} + J_B^{\text{конв}}, \tag{23}$$

так как объём состоит из элементарных цилиндров $\delta V = c_n\,\delta A\,\Delta t$.

Разность первых двух интегралов по объёму V представляет собой локальное приращение величины B в этом объёме за время Δt , а предел отношения этого приращения ко времени – локальную производную для начального объёма V . Разность остальных двух интегралов по объёмам V' и V характеризует конвективное приращение $\Delta B_{\text{êîâ}}$ для конечного момента времени $t + \text{Ä}t$, а предел отношения этого приращения ко времени – конвективную производную.

Преобразуя поверхностный интеграл в (23) по формуле (13), получим формулу для полной производной по времени от интеграла, взятого по подвижному объёму,

$$\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V(t)} B_V(x,y,z,t)\delta V = \int\limits_{V}\frac{\partial B_V}{\partial t}\delta V + \oint\limits_{A} B_V c_n\,\delta A = \int\limits_{V}\Big[\frac{\partial B_V}{\partial t} + \mathrm{div}(B_V\vec{c})\Big]\delta V\ . \tag{24}$$

Новый метод вывода формулы для производной по времени от интеграла по зависящему от времени объёму. Рассмотрим вывод формулы (24), исходя из производной по времени от величины $\delta B = B_V\,\delta V$, характеризующей количество свойства B малого подвижного элемента среды,

$$\frac{\mathrm{d}(\delta\mathrm{B})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(B_V\delta V)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}B_V}{\mathrm{d}t}\delta V + B_V\frac{\mathrm{d}(\delta V)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}B_V}{\mathrm{d}t}\delta V + B_V\,\mathrm{div}\,\vec{c}\,\delta V\ . \tag{25}$$

Здесь использовано известное выражение для дивергенции $\mathrm{div}\,\vec{c} = \frac{\mathrm{d}(\delta V)}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\delta V}$.

Если взять оператор набла (∇) от произведения вектора на скаляр $\nabla(B_V\,\vec{c}) = = \vec{c}\cdot\nabla B_V + B_V\,\nabla\vec{c}$ и использовать оператор индивидуальной производной по времени $\frac{\mathrm{d}B_V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial B_V}{\partial t} + \vec{c}\cdot\nabla B_V$, то можно получить известное *кинематическое равенство*

$$\frac{\partial B_V}{\partial t} + \mathrm{div}\,(B_V\vec{c}) = \frac{\mathrm{d}B_V}{\mathrm{d}t} + B_V\,\mathrm{div}\,\vec{c}\,, \tag{26}$$

Тогда производная (25) с учётом (26) может быть записана в таком виде:

$$\frac{\mathrm{d}(\delta\mathrm{B})}{\mathrm{d}t} = \Big[\frac{\mathrm{d}B_V}{\mathrm{d}t} + B_V\,\mathrm{div}\,\vec{c}\Big]\delta V = \Big[\frac{\partial B_V}{\partial t} + \mathrm{div}\,(B_V\vec{c})\Big]\delta V\ .$$

Интегрируя это уравнение, сразу приходим к известному интегралу векторного анализа (24). Переходя от объёмного интеграла к поверхностному, получим

$$\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{d}t} = \int_V \left[\frac{\partial B_V}{\partial t} + \mathrm{div}(B_V \vec{c})\right]\delta V = \int_V \frac{\partial B_V}{\partial t}\delta V + \oint_A B_V \vec{c}\,\delta\vec{A} = \frac{\partial B}{\partial t} + J_B^{\text{конв}} .$$

Заменяя $\partial B/\partial t$ по уравнению (20)

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -J_B + J_{\text{â.è}} = -J_B^{\text{êîíâ}} - J_B' + J_{\text{â.è}} , \qquad (27)$$

получим

$$\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{d}t} = -J_B + J_{\text{в.и}} + J_B^{\text{конв}} = -J_B' + J_{\text{в.и}} . \qquad (28)$$

Уравнения (27) и (28) являются уравнениями баланса для величины B соответственно для неподвижного контрольного пространства и подвижного элемента среды. Сравнивая эти уравнения, заключаем, что в случае неподвижного контрольного пространства перенос свойства B через границу открытой системы (27) происходит как совместно с переносом вещества (конвективный перенос), так и без переноса вещества, а в случае подвижного элемента среды (28) перенос свойства B через границу закрытой системы происходит без переноса вещества.

Выводы:

1 Проведена систематизация терминов физических величин теории переноса и их обозначений в соответствии с уравнениями связи. Установлена однозначная связь между потоками величин и скалярными потоками векторов.

2 Получены балансовые уравнения переноса для открытой неподвижной системы и подвижной закрытой системы в обобщённом виде.

3 Дан упрощённый метод вывода формулы для производной по времени от интеграла, взятого по зависящему от времени объёму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. Т VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 736 с.: ил.

2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973.– 848 с.: ил.

3. Самойлович Г. С. Гидрогазодинамика: Учебник для вузов. – М.: Машиностроение, 1990. – 384 с.: ил.

4. Седов А. И. Механика сплошной среды, т. 1. – М.: Наука, 1976.– 536 с.: ил.

5. Теплопередача: Учеб. для вузов /В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – 4-е изд.. – М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.: ил.

6. Гуров К. П. Феноменологическая термодинамика необратимых процессов (физические основы) / Монография. – М.: Наука, 1978. – 128 с.: ил.

7. Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1989. – 608 с.: ил.