

Павлодарский государственный
университет им. С.Торайгырова

ДИНАМИКА ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ДЕЙСТВИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ И СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НАГРУЗОК

*Мақалада динамикалық күштер әсері нәтижесіндегі
пластиналар есебі қарастырылады. Есептеу ЭЕМ пайдалану арқылы
соңғы айырма әдісі бойынша жүргізіледі.*

*Calculation of plates on dynamic effects is considered in the
article. The calculation is carried out with the help of final differences
method using ECM.*

Рассматривается прямоугольная ортотропная пластина при действии произвольно расположенных возмущающих нагрузок и сосредоточенных масс. Учитываются упругое основание пластины, шарнирное опирание или защемление по контуру и свободный край. Динамическая нагрузка и сосредоточенные массы могут быть приложены весьма произвольно. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний тонких пластин имеет вид [1]:

$$D_1 W_{,xxxx} + 2D_3 W_{,xxyy} + D_2 W_{,yyyy} + \frac{q}{g} W_{,tt} + KW = F \quad (1)$$

Здесь поперечная нагрузка задается в виде:

$$F = R(A \cos \Theta t + B \sin \Theta t) - \frac{P}{g} W_{,tt} \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) принято:

D_1, D_2, D_3 – цилиндрические жесткости; W – прогиб пластин; q – интенсивность нагрузки на единицу площади; K – коэффициент упругости грунта; Θ – частота возмущающей силы; R – амплитудное значение возмущающей силы; $\frac{P}{g}$ – интенсивность массы.

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$W(x, y, t) = W(x, y)(A \cos \Theta t + B \sin \Theta t) \quad (3)$$

с учетом (2) и (3) дифференциальное уравнение (1) примет вид

$$\eta_1 W_{,xxxx} + 2W_{,xxyy} + \eta_2 W_{,yyyy} - \frac{q}{gD_3} \Theta^2 W - \frac{P}{gD_3} \Theta^2 W_t + \frac{K}{D_3} W = \frac{R}{D_3} \quad (4)$$

В (4) приняты обозначения для соотношений цилиндрических жесткостей

$$\eta_1 = \frac{D_1}{D_3}, \quad \eta_2 = \frac{D_2}{D_3} \quad (5)$$

Для решения дифференциального уравнения (4) применим метод конечных разностей [2,3].

$$\left[\varphi_1 + \left(\frac{K}{D_3} - \frac{q}{gD_3} \Theta^2 W - \frac{P}{gD_3} \Theta^2 W\right) \lambda_1^2 \lambda_2^2\right] W_i + \varphi_2 (W_k + W_l) + \varphi_3 (W_m + W_n) + \varphi_4 (W_q + W_p + W_0 + W_r) + \varphi_5 (W_s + W_t) + \varphi_6 (W_u + W_v) = \frac{R \lambda_1^2 \lambda_2^2}{D_3} \quad (6)$$

где коэффициенты при прогибах определяются выражениями

$$\varphi_1 = \frac{6\eta_1}{\mu^2} + 8 + 6\eta_2 \mu^2, \quad \varphi_3 = -4\eta_2 \mu^2 - 4, \quad \varphi_4 = 2, \quad (7)$$

$$\varphi_3 = -4\eta_2 \mu^2 - 4, \quad \varphi_4 = 2, \quad \varphi_5 = \frac{\eta_1}{\mu^2}, \quad \varphi_6 = \eta_2 \mu^2$$

Для прямоугольных пластин $m = a/b$ – соотношение сторон.

Таблица 1
 Результаты расчета пластины на вынужденные колебания

| № задачи | Схема пластины | К | P0 102 кг | R0 102 кг | Поло- жение массы P0 | Прогитбы в отмеченных точках | | | | | |
|----------|----------------|------|--------------|--------------|-------------------------------|------------------------------|---------|---------|----------|---------|-----|
| | | | | | | W1 | W2 | W3 | W4 | W5 | W6 |
| 1 | | 0.0 | 2.0 | 3 | 0.00354 | 0.00660 | 0.00838 | 0.00660 | 0.00354 | 0.0 | |
| 2 | | 0.0 | 2.0 | 3 | 0.00401 | 0.00698 | 0.00895 | 0.00698 | 0.00401 | 0.0 | |
| 3 | | 0.0 | 2.0 | 3 | 0.00583 | 0.01091 | 0.01350 | 0.01350 | 0.01091 | 0.0 | |
| 4 | | 0.5 | 2.0 | 3 | 0.00254 | 0.00507 | 0.00676 | 0.00507 | 0.00254 | 0.0 | |
| 5 | | 0.5 | 10.0 | 2.0 | 3 | 0.00076 | 0.00225 | 0.00357 | 0.00225 | 0.00076 | 0.0 |
| 6 | | 10.0 | 2.0 | 1 | 0.00131 | 0.00131 | 0.00101 | 0.00089 | 0.00081 | 0.00105 | |
| 7 | | 10.0 | 2.0 | 2 | 0.00169 | 0.00446 | 0.00415 | 0.00375 | 0.000387 | 0.00573 | |
| 8 | | 10.0 | 2.0 | 3 | 0.00138 | 0.00406 | 0.00604 | 0.00484 | 0.00411 | 0.00502 | |
| 9 | | 10.0 | 2.0 | 4 | 0.00112 | 0.00332 | 0.00463 | 0.00674 | 0.00721 | 0.01031 | |
| 10 | | 10.0 | 2.0 | 5 | 0.00072 | 0.00240 | 0.00335 | 0.00699 | 0.01355 | 0.02319 | |
| 11 | 10.0 | 2.0 | 6 | 0.00001 | 0.00044 | 0.00075 | 0.00374 | 0.00101 | 0.02677 | | |

осредоточенные массы и возмущающие силы определяются выражениями

$$P_0 = P\lambda_1\lambda_2, \quad R_0 = R\lambda_1\lambda_2 \quad (8)$$

Аппроксимируем пластину регулярной сеткой и запишем уравнение (6) для i -ой точки сеточной области [4].

$$\left(\varphi_1 + \frac{Ka^4}{S^4\mu^2 D_3} - \frac{P_0\Theta^2 a^2}{gD_3 S^2 \mu^2} - \frac{q\Theta^2 a^4}{S^4\mu^2 D_3} \right) W_i + \varphi_2(W_k + W_l) + \varphi_3(W_m + W_n) + \varphi_4(W_p + W_q + W_o + W_r) + \varphi_5(W_s + W_t) + \varphi_6(W_u + W_v) = \frac{R_0 a^2}{D_3 S^2 \mu^2} \quad (9)$$

где S – число шагов сетки.

Точки приложения сосредоточенных масс и возмущающих сил можно принимать произвольно в любом узле сеточной области. Граничные условия шарнирного опирания, защемления и свободного края могут варьироваться по любой стороне пластинки или на участке стороны. Упругое основание также может учитываться на участке пластины или по всему основанию. Программа на ЭВМ составлена для произвольного числа шагов сетки S . В зависимости от S программа автоматически формирует нужное число уравнений в конечных разностях. Задачи решались при числе шагов сетки $S=6,8,10$. При $S=10$, без уточнения значений расчета, расхождение результатов с имеющимися точными решениями [5] лежит в пределах 3%.

Исследовалось влияние внешней нагрузки и граничных условий на прогибы пластины. Значения прогибов в характерных точках пластины приведены в таблице 1. В задачах с 1 по 3 рассматривается пластина, шарнирно опертая по всему контуру. Величина массы P_0 меняется. В задаче 4 рассматривается эта же пластина, но с учетом упругого основания с коэффициентом упругости грунта $K=0,5$. В задаче 5 рассматривается пластина, защемленная по всему контуру. В этих задачах сосредоточенная масса и возмущающая сила приложены в центре пластины. В задачах с 6 по 11 исследуется влияние положения массы и возмущающей силы на прогибы пластины. Внешняя нагрузка поочередно прикладывается в точках 1, 2, ..., 6. Пластина защемлена по двум противоположным сторонам, а две другие свободны.

Представленный в работе класс задач представляет практическую ценность при проектировании прямоугольных плит на упругом основании с комбинированными граничными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ельмуратова А.Ф., Ельмуратов С.К. Расчет ортотропных пластин на вынужденные колебания. Журнал «Наука и техника Казахстана». - Павлодар: ПГУ, 2002. - № 4.
2. Варвак П.М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. - Киев: АН УССР, 1949. - ч.1, 1959. - ч.2.
3. Варвак П.М., Рябов А.Ф. Справочник по теории упругости. Будивельник. - Киев, 1971.
4. Боженов А.Ш., Ельмуратов С.К. Влияние сосредоточенных масс на вынужденные колебания прямоугольных ортотропных пластин. В сб. «Строительная механика». - Караганда: КПТИ, 1978. - вып. 3.
5. Киселева И.В. Колебания опертой по контуру прямоугольной ортотропной пластинки с учетом сосредоточенной массы в месте приложения вибрационной нагрузки. - М.:МАДИ, 1957. - вып. 21.