

УДК 624.074.43

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ РЕБРИСТОЙ ПЛИТЫ

С.К. Ельмуратов

Павлодарский государственный университет

им. С. Торайгырова

Рассматривается вертикально расположенная ребристая плита, защемленная по трем сторонам и свободная по верхней кромке. На плиту действует вертикальная распределенная по верхней кромке нагрузка. Выделим из плиты плоский единичный элемент, ограниченный координатными линиями $x^1, x^1 + dx^1$ в одном направлении и $x^2, x^2 + dx^2$ – в другом. На рисунке 1 показаны силы, действующие на стороны элемента и вектор объемной силы $\vec{V} dx^1 dx^2$. Для рассматриваемого плоского элемента запишем условие равенства нулю главного вектора всех сил, и после сокращения на $dx^1 dx^2$, получим

$$\frac{\partial \sqrt{a_{22}} \vec{\sigma}_{(1)}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sqrt{a_{11}} \vec{\sigma}_{(2)}}{\partial x^2} + \sqrt{a} \vec{V} = 0, \quad (1)$$

где $a_{\alpha\beta}$ – компоненты метрического тензора \hat{a} ; $\vec{\sigma}_{(\alpha)}$ – физические компоненты вектора напряжений; \vec{V} – вектор объемной силы. Для криволинейной системы координат удобно оперировать ковариантными или контравариантными компонентами вектора напряжений. Заменяем физические компоненты $\vec{\sigma}_{(\alpha)}$ вектора напряжений через его ковариантные $\vec{\sigma}_{(\alpha)}$ или контравариантные $\vec{\sigma}^{\alpha}$ компоненты, представленные в матрице основных \vec{e}_{β} и взаимных \vec{e}^{β} локальных базисов[1-3].

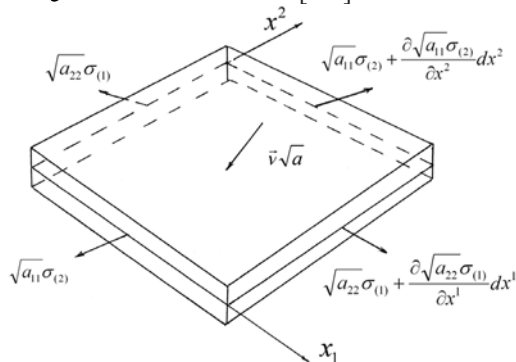


Рисунок 1 – Векторы напряжений и объемных сил элемента плиты

$$\bar{\sigma}_{(\alpha)} = \frac{\bar{\sigma}^{\alpha}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} = \frac{\bar{\sigma}^{\alpha} \sqrt{a}}{\sqrt{a_{\gamma\gamma}}}; \quad \bar{\sigma}_{(\alpha)} = \frac{\bar{\sigma}_{\alpha}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}}; \quad (\alpha = 1, 2; \gamma = 2, 1) \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) получим

$$\frac{\partial \sqrt{a} \bar{\sigma}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \sqrt{a} \bar{\sigma}^2}{\partial x^2} + \sqrt{a} \bar{V} = 0.$$

Здесь $a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ – фундаментальный определитель метрического тензора.

Зависимость между компонентами тензоров напряжений и деформации для случая малых деформаций упругого тела, находящегося в условиях плоской задачи, подчиняется известным соотношениям закона Гука.

Для ортогональной системы координат их можно записать в виде

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\nu a^{\alpha\beta} a^{\gamma\omega} + (1-\nu) \cdot a^{\alpha\gamma} a^{\beta\omega} \right] \varepsilon_{\gamma\omega}, \quad (3)$$

Придавая индексам значения $(\alpha, \beta, \gamma, \omega = 1, 2)$ в развернутом виде окончательно получим

$$\begin{aligned} \sigma^{11} &= \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_{11} a^{11} a^{11} + \varepsilon_{22} \left(a + a^{12} a^{21} \right) + 2 \varepsilon_{12} a^{11} a^{12} \right] \\ \sigma^{22} &= \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_{22} a^{22} a^{22} + \varepsilon_{11} \left(a + a^{12} a^{21} \right) + 2 \varepsilon_{21} a^{22} a^{21} \right] \\ \sigma^{12} &= \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_{12} \left(a^{11} a^{11} + a^{12} a^{21} \right) \left(1 + \nu^2 \right) + \varepsilon_{11} a^{11} a^{12} + \varepsilon_{22} a^{22} a^{21} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Касательные векторы основного локального базиса деформированной системы координат определяются по формуле

$$\bar{e}_{\alpha}^* = \frac{\partial \bar{\tau}^*}{\partial x^{\alpha}} = \bar{e}_{\alpha} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^{\alpha}} \quad (5)$$

Соответствующие им компоненты основного метрического тензора вычисляются из соотношения

$$a_{\alpha\beta}^* = a_{\alpha\beta} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^{\alpha}} \cdot \bar{e}_{\beta} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^{\beta}} \cdot \bar{e}_{\alpha} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^{\alpha}} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^{\beta}} \quad (6)$$

Из вариации компонент основного метрического тензора $a_{\alpha\beta}^*$ получим выражения компонент тензора деформаций

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(a_{\alpha\beta}^* - a_{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^{\alpha}} \cdot \bar{e}_{\beta} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^{\beta}} \cdot \bar{e}_{\alpha} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^{\alpha}} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^{\beta}} \right). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (4), затем в (1) и проецируя полученные уравнения на векторы взаимного базиса \vec{a}_{α} локальной системы координат можно получить два скалярных дифференциальных уравнения равновесия в перемещениях. Производим дискретизацию полученных дифференциальных уравнений методом криволинейных сеток для плоской

задачи теории упругости.

С учетом ортотропии материала выражения для компонентов тензора напряжений и деформации примут вид

$$\begin{aligned} \sigma^{11} &= \frac{E_1 \cdot h_c}{1 - \nu_1 \nu_2} \left[\varepsilon_{11} a^{11} a^{11} + \varepsilon_{22} (\nu_2 a + a^{12} a^{21}) + 2\varepsilon_{12} a^{11} a^{12} \right] \\ \sigma^{22} &= \frac{E_2 \cdot h_c}{1 - \nu_1 \nu_2} \left[\varepsilon_{22} a^{22} a^{22} + \varepsilon_{11} (\nu_1 a + a^{12} a^{21}) + 2\varepsilon_{21} a^{22} a^{21} \right] \\ \sigma^{12} &= 2G h_c \left[\varepsilon_{11} a^{11} a^{12} + \varepsilon_{22} a^{22} a^{21} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Выполним дискретизацию векторного уравнения (1). Рассмотрим плоскую разностную сетку (рисунок 2). Искомые функции вычисляем в определенных узлах разностной сетки, как показано на схеме, а именно: напряжения $\vec{\sigma}^1$ в узлах $(i \square 0,5; j)$, $\vec{\sigma}^2$ в узлах $(i; j \square 0,5)$; компоненты вектора перемещений \vec{u} в основных узлах $(i; j)$ разностной сетки.

Применяя разностную схему непосредственно к векторным слагаемым уравнения (1), получим разностный аналог контравариантных производных вектора напряжений

$$\begin{aligned} & \left[\sqrt{a} (\sigma^{11} \vec{e}_1 + \sigma^{12} \vec{e}_2) \right]_{+0,5; j} - \left[\sqrt{a} (\sigma^{11} \vec{e}_1 + \sigma^{12} \vec{e}_2) \right]_{-0,5; j} + \\ & \left[\sqrt{a} (\sigma^{21} \vec{e}_1 + \sigma^{22} \vec{e}_2) \right]_{i, j+0,5} - \left[\sqrt{a} (\sigma^{21} \vec{e}_1 + \sigma^{22} \vec{e}_2) \right]_{i, j-0,5} + (\sqrt{a} \vec{V})_{i; j} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

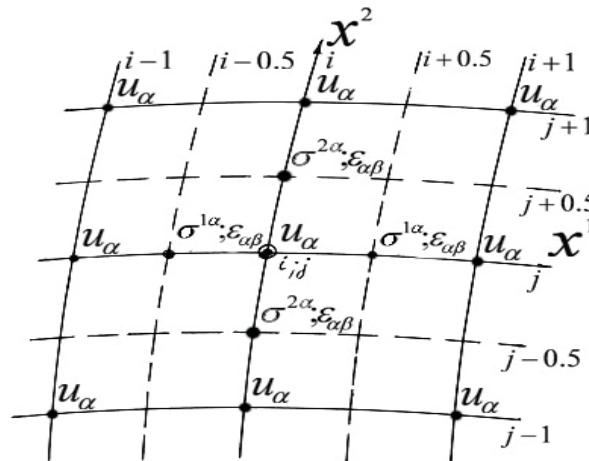


Рисунок 2 – Двумерная разностная сетка.

Определим компоненты вектора перемещений $\vec{u} = u_\alpha \cdot \vec{e}^\alpha$ в основных узлах $(i; j)$ и произведем усреднение в промежуточных узлах $(i \sphericalangle 0,5; j \square 0,5)$ получим

$$\begin{aligned}\bar{u}_{i\pm 0,5;j+0,5} &= \frac{1}{4}(\bar{u}_{i\pm 1;j+1} + \bar{u}_{i\pm 1;j} + \bar{u}_{i;j} + \bar{u}_{i;j+1}); \\ \bar{u}_{i\pm 0,5;j-0,5} &= \frac{1}{4}(\bar{u}_{i\pm 1;j-1} + \bar{u}_{i\pm 1;j} + \bar{u}_{i;j} + \bar{u}_{i;j-1}); \\ \bar{u}_{i\pm 0,5;j} &= \frac{1}{2}(\bar{u}_{i\pm 1;j} + \bar{u}_{i;j}); \bar{u}_{i;j\pm 0,5} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i;j} + \bar{u}_{i;j\pm 1}).\end{aligned}\tag{10}$$

Разностное векторное уравнение (10) спроецируем на векторы взаимного локального базиса \bar{a}^α в узле $(i;j)$. В результате получим систему двух скалярных уравнений ($\alpha=1,2$)

$$\begin{aligned}&\sqrt{a_{i+0,5;j}}(\sigma_{i+0,5;j}^{11} a_{1i+0,5;j}^{ai;j} + \sigma_{2i+0,5;j}^{12} a_{2i+0,5;j}^{ai;j}) - \\ & - \sqrt{a_{i-0,5;j}} \cdot (\sigma_{i-0,5;j}^{11} \cdot a_{1i-0,5;j}^{ai;j} + \sigma_{2i-0,5;j}^{12} \cdot a_{2i-0,5;j}^{ai;j}) + \\ & + \sqrt{a_{i;j+0,5}} \cdot (\sigma_{i;j+0,5}^{21} \cdot a_{1i;j+0,5}^{ai;j} + \sigma_{2i;j+0,5}^{22} \cdot a_{2i;j+0,5}^{ai;j}) - \\ & - \sqrt{a_{i;j-0,5}} \cdot (\sigma_{i;j-0,5}^{21} \cdot a_{1i;j-0,5}^{ai;j} + \sigma_{2i;j-0,5}^{22} \cdot a_{2i;j-0,5}^{ai;j}) + \sqrt{a_{i;j}} V^B \cdot \delta_\beta^\alpha = 0\end{aligned}\tag{11}$$

В уравнении (11) приняты коэффициенты преобразования при переходе от узла $(i;j)$ к узлу $(i \square 0,5;j \square 0,5)$.

$$a_{b \ i\pm 0,5}^a \ i;j = \bar{e}_{i;j}^a \cdot \bar{e}_{b \ i\pm 0,5;j\pm 0,5}$$

Выполним дискретизацию деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в соответствующих узлах методом криволинейных сеток и получим разностные выражения для компонент деформации

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11 \ i+0,5;j} &= \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^1} \cdot \bar{e}_1 \right)_{i+0,5;j} = (\bar{u}_{i+1;j} - \bar{u}_{i;j}) \cdot \bar{e}_{1i+0,5;j} = \\ &= [(u_\alpha \cdot \bar{e}^\alpha)_{i+1;j} - (u_\alpha \cdot \bar{e}^\alpha)_{i;j}] \cdot \bar{e}_{1i+0,5;j}; \\ \varepsilon_{22 \ i+0,5;j} &= \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^2} \cdot \bar{e}_2 \right)_{i+0,5;j} = (\bar{u}_{i+0,5;j+0,5} - \bar{u}_{i+0,5;j-0,5}) \cdot \bar{e}_{2i+0,5;j} = \\ &= [(u_\alpha \cdot \bar{e}^\alpha)_{i+0,5;j+0,5} - (u_\alpha \cdot \bar{e}^\alpha)_{i+0,5;j-0,5}] \cdot \bar{e}_{2i+0,5;j}; \\ \varepsilon_{21 \ i+0,5;j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cdot \bar{e} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cdot \bar{e} \right)_{i+0,5;j} = \frac{1}{2} [(\bar{u}_{i+1;j} - \bar{u}_{i;j}) \cdot \bar{e}_{2i+0,5;j} + \\ & (\bar{u}_{i+0,5;j+0,5} - \bar{u}_{i+0,5;j-0,5}) \cdot \bar{e}_{1i+0,5;j}] = \frac{1}{2} \{ [(u_\alpha \cdot \bar{e}^\alpha)_{i+1;j} - (u_\alpha \cdot \bar{e}^\alpha)_{i;j}] \times \\ & \times \bar{e}_{2i+0,5;j} + [(u_\alpha \cdot \bar{e}^\alpha)_{i+0,5;j+0,5} - (u_\alpha \cdot \bar{e}^\alpha)_{i+0,5;j-0,5}] \cdot \bar{e}_{1i+0,5;j} \}\end{aligned}\tag{12}$$

Выполняя скалярное произведение базисных векторов по формулам (12), и учитывая (10) окончательно получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11i\pm 0,5;j} &= \pm(u_{1i\pm 1;j} a_{1i\pm 0,5;j}^{1i\pm 1;j} + u_{2i\pm 1;j} a_{1i\pm 0,5;j}^{2i\pm 1;j} - u_{1i;j} a_{1i\pm 0,5;j}^{1i;j} - u_{2i;j} a_{1i\pm 0,5;j}^{2i;j}); \\ \varepsilon_{22i;j\pm 0,5} &= \pm(u_{1i;j\pm 1} a_{2i;j\pm 0,5}^{1i;j\pm 1} + u_{2i;j\pm 1} a_{2i;j\pm 0,5}^{2i;j\pm 1} - u_{1i;j} a_{2i;j\pm 0,5}^{1i;j} - u_{2i;j} a_{2i;j\pm 0,5}^{2i;j}); \\ \varepsilon_{12i\pm 0,5;j} &= \frac{1}{2}[\pm(u_{1i;j\pm 1} a_{2i\pm 0,5;j}^{1i\pm 1;j} + u_{2i;j\pm 1} a_{2i\pm 0,5;j}^{2i\pm 1;j} - u_{1i;j} a_{2i\pm 0,5;j}^{1i;j} - u_{2i;j} a_{2i\pm 0,5;j}^{2i;j}) \\ &+ \frac{1}{4}(u_{1i\pm 1;j+1} \cdot a_{1i\pm 0,5;j}^{1i\pm 1;j+1} + u_{2i\pm 1;j+1} \cdot a_{1i\pm 0,5;j}^{2i\pm 1;j+1} - u_{1i;j+1} \cdot a_{1i\pm 0,5;j}^{1i;j+1} - u_{2i;j+1} \cdot a_{1i\pm 0,5;j}^{2i;j+1} \\ &- u_{1i\pm 1;j-1} \cdot a_{1i\pm 0,5;j}^{1i\pm 1;j-1} - u_{2i\pm 1;j-1} \cdot a_{1i\pm 0,5;j}^{2i\pm 1;j-1} - u_{1i;j} \cdot a_{1i\pm 0,5;j}^{1i;j} - u_{2i;j} \cdot a_{1i\pm 0,5;j}^{2i;j})]. \end{aligned} \quad 13)$$

Подставляя последовательно (13) в (8), а затем в (1) и, проецируя полученные уравнения на векторы взаимного базиса \vec{a}_a локальной системы координат, получим систему двух скалярных уравнений в перемещениях и, дополнив их граничными условиями, получаем разрешающую систему уравнений плоской задачи.

Исследовано напряженно-деформированное состояние ребристой плиты-панели при действии нагрузки вертикально приложенной в срединной плоскости. Подобрано расположение ребер, их размеры и размеры плиты, соответствующие наименьшему напряженно-деформированному состоянию плиты-панели.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ельмуратов С.К. Уравнения равновесия и движения тонких оболочек и пластин и их численная реализация. // Наука и техника Казахстана, Павлодар, №1, 2005. – С. 24-33.
- 2 Ельмуратов С.К. Расчет тонких оболочек и пластин на устойчивость и динамику. // Вестник ПГУ, серия физико-математическая, Павлодар, ПГУ, №3, 2005. – С. 43-51.
- 3 Ельмуратов С.К. Исследование устойчивости и колебаний тонких оболочек и пластин методом криволинейных сеток. // Поиск, серия естественных и технических наук, Алматы, №4. 2005. – С. 312-317.
- 4 Пред. патент. 1649. РК. Комплексные добавки для бетонной смеси. / Ш.К. Торпищев., С.К. Ельмуратов и др. 15.11.2005. Бюл. № 11.– С. 3 с.

Түйіндеме

Еңбекте қатқылдық қырларымен күшейтілген плитаның кернеулі-деформациялық күйі зерттеледі. Есеп қисықсызықты торлар әдісімен орындалған.

Resume

The work presents the research of the ribbed slab reinforced with stiffening plates. The calculation has been carried out by the method of curvilinear net.