517.4
УДК – 513-731

**Абдрахманов Қ.,
Анарбаева Н.Т.**

СЫЗЫҚТЫ БЕТТЕРДІҢ ШЕКСІЗ АЗ МАЙЫСУЫ ТУРАЛЫ

В данной статье рассматриваются бесконечно малые изгибания линейчатых поверхностей.

Infinitesimal shades of ruled surfaces are considered in this article.

Бір байламды облысқа гомеоморфты $X_\varepsilon (\varepsilon > 0)$ беттер топтамын қарастырамыз. Бұл топтамда $\varepsilon = 0$ болғандағы X беті X_ε бетіне өзара бір мәнді үзіліссіз бейнеленсін. Онда әрбір $M \in X$ нүктесіне $M_\varepsilon \in X_\varepsilon$ нүктесі сәйкес келетін болсын. X бетінде ішкі координаттар (u, ϑ) ендіреміз. Айнымалы нүктенің радиус векторы $\overline{X}(u, \vartheta)$ болсын. $\overline{X}(u, \vartheta)$ функциясын үзіліссіз үш рет дифференциалданатын және $\left[\overline{X}_u, \overline{X}_0\right] \neq 0$ деп жорамалдаймыз. Ал $M_\varepsilon \in X_\varepsilon$ нүктенің радиус векторын $\overline{X} = \overline{X}(u, \vartheta, \varepsilon)$ және

$$\overline{X} = \overline{X}(u, \vartheta) + \varepsilon \overline{Z}(u, \vartheta, \varepsilon) \qquad (1)$$

мұнда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{Z}(u, \vartheta, \varepsilon) = \overline{X}(u, \vartheta) \qquad (2)$$

Онда $\overline{Z}(u, \vartheta, 0)$ X бетінің деформациясының бастапқы негізіндегі жылдамдықтар өрісі деп қарастыруымызға болады. Бұл жағдайда M нүктесінің M_ε нүктесіне шексіз аз деформациясы деп атаймыз, ол (1) формуламен анықталады. Егер ε-нан жоғары ретті шексіз аз шамаларды ескермесек. Онда (1) формуламен берілген деформацияларды қарапайым деформация деп атаймыз. Бұл беттегі сызықты элементінің квадраты

$$ds_\varepsilon^2 = ds^2 + 2\varepsilon\left(d\overline{x}d\overline{z}\right) + \varepsilon^2 dz^2 \qquad (3)$$

ds_ε^2 шексіз аз шама болуы үшін ε бойынша бірден жоғары ретті шексіз аз шамаларды тастап жазамыз, сонда

$$(d\overline{x}, d\overline{z}) = 0 \qquad (4)$$

болуы жеткілікті болып табылады немесе

$$(d\bar{x}, d\bar{z}) = \left(\bar{X}_u du + \bar{X}_\vartheta d\vartheta, \bar{Z}_u du + \bar{Z}_\vartheta d\vartheta\right) = \left(\bar{X}_u \bar{Z}_u\right) du^2 + \left(\left(\bar{X}_u \bar{Z}_\vartheta\right) + \left(\bar{X}_\vartheta \bar{Z}_u\right)\right) du d\vartheta + + \left(\bar{X}_\vartheta \bar{Z}_\vartheta\right) d\vartheta^2 \qquad (5)$$

Бұл келесі үш дербес туындылы дифференциал теңдеулерге эквивалентті

$$\left(\bar{X}_u \bar{Z}_\vartheta\right) = 0, \ \left(\bar{X}_u \bar{Z}_\vartheta\right) + \left(\bar{X}_\vartheta \bar{Z}_u\right) = 0, \ \left(\bar{X}_\vartheta \bar{Z}_\vartheta\right) = 0, \qquad (6)$$

Онда келесі теорема орындалатыны белгілі.

Теорема: Егер $\bar{Z}(u, \vartheta)$ өрісі (5) теңдеулер жүйесін қанағаттандырса, онда $\bar{Y}(u, \vartheta)$ векторлар өрісі табылып

$$\bar{Z}_u = \left[\bar{Y}, \bar{X}_u\right], \qquad \bar{Z}_\vartheta = \left[\bar{Y}, \bar{X}_\vartheta\right] \qquad (7)$$

Демек,

$$d\bar{z} = \left[\bar{y} d\bar{x}\right] \qquad (8)$$

Осыдан $\bar{Z}$ өрісі X бетінің нүктелерінің деформация кезіндегі жылдамдықтар өрісі, ал $\bar{y}$ өрісі мезгілдік айналу векторлар өрісі болатынына көз жеткіземіз. Осыған қоса

$$\bar{s} = \bar{z} - \left[\bar{y}, \bar{x}\right] \qquad (9)$$

векторлар өрісін анықтаймыз.

$$\bar{s} = \frac{\delta}{\delta\varepsilon}\left(\bar{x} + d\bar{x}\right) - \left[\bar{y}, \bar{x} + d\bar{x}\right] \qquad (10)$$

Сонымен M нүктесімен байланысты $\bar{s}$ векторы M нүктесінің сызықты элементтері арқылы анықталатын M' нүктелерінің жалпы ұштары үшін ақиқат жылдамдықпен осьті айналу қозғалысындағы айналу жылдамдығының айырымы болады екен. $\bar{s}$ векторын бір қалыпты орналастыру векторы деп атаймыз. Ал $\left(\bar{y}, \bar{s}\right)$ жұбын винттер өрісі деп атаймыз. Егер $\bar{y} - const$ болса, онда шексіз аз майысуды тепе-тен қозғалыс дейміз. Егер X беті тепе-тең қозғалыстардан басқа шексіз аз майстыруларға келтірмесе, онда ол бетті қатты бет деп атаймыз.

Сызықты беттердің шексіз аз майыстырулар теориясының негізгі теңдеулерін қорытып шығару үшін (6) формулаға сүйенеміз. Осы формулалардан $\bar{Z}_{u\vartheta} = \bar{Z}_{\vartheta u}$ болғандықтан

$$\left[\bar{y}_\vartheta \bar{x}_u\right] = \left[\bar{y}_u \bar{x}_\vartheta\right] \qquad (11)$$

орындалады. Демек $\bar{x}_u, \bar{x}_\vartheta, \bar{y}_u$ және $\bar{y}_\vartheta$ векторлары компланар векторлар екен. Осыдан $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ скаляр шамалары бар болып келесі теңдіктер орындалады.

$$\bar{y}_u = \alpha \bar{x}_u + \beta \bar{x}_\vartheta, \ \bar{y}_\vartheta = \gamma \bar{x}_u + \delta \bar{x}_\vartheta \qquad (12)$$

(11) формуланы ескерсек $\alpha = \delta$ болады, онда

$$\overline{y}_u = \alpha \overline{x}_u + \beta \overline{x}_\vartheta, \qquad \overline{y}_\vartheta = \gamma \overline{x}_u + \alpha \overline{x}_\vartheta \tag{13}$$

$\overline{y}_{u\vartheta} = \overline{y}_{\vartheta u}$ екенін пайдаланып, $\alpha_\vartheta \overline{x}_u + \alpha \overline{x}_{u\vartheta} - \beta_\vartheta \overline{x}_{\vartheta\vartheta} = \gamma_u \overline{x}_u + \gamma \overline{x}_{uu} - \alpha \overline{x}_\vartheta - \alpha \overline{x}_{\vartheta u}$

$$(\alpha_\vartheta - \gamma_u)\overline{x}_u + (\alpha_u - \beta_\vartheta)\overline{x}_\vartheta = \gamma \overline{x}_{uu} - 2\alpha \overline{x}_{u\vartheta} + \beta \overline{x}_{\vartheta\vartheta} \tag{14}$$

$\overline{X}_u$ мен $\overline{X}_\vartheta$ коэффициенттерін салыстырып, Гаусс формулаларын пайдалану арқылы

$$\begin{cases} L\gamma - 2M\alpha + N\beta = 0 \\ \alpha_\vartheta - \gamma_u = \Gamma_{11}^1 \gamma - \Gamma_{12}^1 \alpha + \Gamma_{22}^1 \beta \\ \alpha_u - \beta_u = \Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 \beta \end{cases} \tag{15}$$

Бұл теңдеулер жүйесін шексіз аз майыстырулар теориясының негізгі теңдеулер жүйесі деп атаймыз. Мұндағы L, M, N екінші квадраттық форманың коэффиценттері, ал Γ_{ij}^k - Христофель символдары. Егер сызықты беттің теңдеуін

$$\overline{x}(u,\vartheta) = \overline{l}(u) + \vartheta \tau(u) \tag{16}$$

түрінде алсақ, онда

$$ds^2 - d\overline{x}^2 = 1 + \vartheta^2 k^2(s) ds^2 + 2dsdu + du^2 \tag{17}$$

Демек,

$$L(s,\vartheta) = k(s)x(s)\vartheta, \; M(s,\vartheta) = N(s,\vartheta) = 0. \tag{18}$$

Мұндағы $k(s)$ және $\gamma(s)$, $\overline{l}(s)$ сызығының қисықтығы мен бұралымы.

Христофель символдары келесі түрде болады:

$$\Gamma_{11}^1 = -\left[\frac{1+k^2\vartheta^2}{\vartheta} - \frac{k'(s)}{k(s)}\right]; \; \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{\vartheta} + \frac{k'(s)}{k(s)}; \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{\vartheta}; \quad \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{\vartheta}; \quad \Gamma_{22}^1 = 0. \tag{19}$$

Шексіз аз майыстырудын негізгі теңдеулер жүйесінің орнына қойғанда

$$\begin{cases} k(s)x(s)\gamma(s,\vartheta) = 0 \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial\vartheta} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial s} = -\dfrac{2}{\vartheta}\alpha - \left[\dfrac{1+k^2\vartheta^2}{\vartheta} - \dfrac{k'}{k\cdot\vartheta}\right]\gamma \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial s} - \dfrac{\partial\beta}{\partial\vartheta} = \dfrac{2}{\vartheta}\alpha + \left[\dfrac{1}{\vartheta} + \dfrac{k'}{k\vartheta}\right]\gamma \end{cases} \tag{20}$$

Сызықты беттің жазық облыстары жоқ деп алсақ, онда

$$k(s)=0,\quad x(s)\neq 0\,,\ \ s=\left[\bar{s}_1,\bar{s}_2\right],\quad \gamma(s,\vartheta)=0 \tag{21}$$

Бұл жағдайда (20) теңдеулер жүйесі келесі түрге келеді

$$\begin{cases}\gamma(s,\vartheta)=0\\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial\vartheta}=-\dfrac{2}{\vartheta}\alpha\\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial s}-\dfrac{\partial\beta}{\partial\vartheta}=\dfrac{2}{\vartheta}\alpha\end{cases} \tag{22}$$

Осы теңдеулер жүйесін шешу арқылы біз $y(s,\vartheta)$ мен $\bar{z}(s,u)$ таба аламыз. Онда

$$\begin{cases}\gamma(s,\vartheta)=0\\ \bar{z}(s,\vartheta)=\left[\bar{k},\bar{x}(x,\vartheta)\right]\end{cases} \tag{23}$$

Осыдан қарастырылған бет деформациялар, яғни шексіз аз майыстырулар классындағы қатты бет болатынын көреміз.

Әдебиеттер:

1. Абдрахманов Қ. Исследование жесткости некоторых линейчатых поверхностей. // Материалы международной научной конференции. «Вопросы прикладной механики», - Шымкент-2006, стр. 30-33.

2. Ефимов М.В. Качественные вопросы теории деформации поверхностей // УМН, т.III, вып., 2.24., 1948.

3. Михайловский В.И. Бесконечно малые изгибания скольжения развертывающихся поверхностей относительно плоскости // Вестник КГУ, вып. 10, 1968.

4. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. - Москва, 1959.