УДК 621.1:532.533

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЫВОДА УРАВНЕНИЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ПОТОКА

В.В. Рындин

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

Ортаның элементін ауыстырушылық мен деформация бойынша кеңістіктік және үстінгі күштерді жұмыстарын есептеу берілді. Кейін осы жұмыстар есебінен реттелген, ретсіз және абсолюттік орта жылжымалы элементтің микробөлшектерін қозғалыс тиісті түрлері үшін баланстық энергияның теңдеулері алынды. Ағында жасалған жұмыстардың түрі бойынша энергия теңдеулеріне кіретін шамалар айқындаусыз өткізіледі.

The calculation of works of spatial and surface forces on strain and movement of an element of medium is given and then in view of these works the balance equations of energy for the corresponding types of motion of micro particles of a moving element of medium - chaotic, ranked and terrain clearance are received. The definition of various magnitudes belonging to equations of the energy is held by correlation of theirs with the corresponding aspects of works.

Введение. В термодинамике уравнение первого закона термодинамики принято записывать в двух видах через работы $p\,\mathrm{d}\tilde{o}$ и $(-\tilde{o}\,\mathrm{d}p)$:

$$\delta q = \mathrm{d}u + \delta w = \mathrm{d}u + p\,\mathrm{d}\tilde{o}\,,\ \ \delta q = \mathrm{d}h - \delta w^{p} = \mathrm{d}h - \tilde{o}\,\mathrm{d}p\,. \qquad (1)$$

Если смысл и наименование работы $p\,\mathrm{d}\tilde{o}$ (изменения объёма) более или менее однозначны, то работа $(-\tilde{o}\,\mathrm{d}p)$ имеет различные наименования (располагаемая, техническая, полезная, работа потока и др.) и смысл её в учебниках трактуется по-разному, что создаёт определённые трудности при изучении термодинамики.

Аналогичные трудности возникают и в механике жидкости и газа (МЖГ) при трактовке величин, входящих в уравнения энергии. Например, при записи уравнений энергии в виде

$$\rho \frac{d}{dt}\frac{c^2}{2} = \rho\, \vec{f} \cdot \vec{c} + \operatorname{div}(P\vec{c}) + N_{in}; \qquad (2)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho\dot{q}^e - N_{in} = \rho\dot{q}^e - p\operatorname{div}\vec{c} + N_{дис}, \qquad (3)$$

под величинами N_{in} и $N_{дис}$ понимаются соответственно «отнесённая к единице объёма мощность внутренних сил» и «диссипируемая мощность, т. е. необратимая мощность внутренних сил с обратным знаком» [1]. Такие определения не позволяют понять смысл вводимых величин, так как не конкретизируют виды работ, из которых выводятся соответствующие мощности. Критический анализ этих и других уравнений энергии для потока и величин, входящих в эти уравнения, даётся в работе [2]. Уточнению смысла и наименований как величин, входящих в уравнения энергии, так и самих уравнений посвящена данная работа.

Основная часть. В связи с изложенными трудностями, обусловленными использованием гидромеханического метода, в основе которого лежит понятие мощности, ниже даётся термодинамический метод вывода уравнений энергии, когда вначале определяются все виды работ, а затем записываются балансовые соотношения для соответствующих видов энергии (внутренней, кинетической и полной), характеризующих соответствующие виды движения микрочастиц системы – хаотическое, упорядоченное, абсолютное (ХД, УД, АД).

Для расчёта работ необходимо знать силы, действующие на выделенный элемент подвижной среды. Все силы условно разделяют на пространственные (объёмные, или массовые) $\vec{F}_{прос}$, действующие на всё вещество внутри выделенного пространства, и поверхностные $\vec{F}_{пов}$, действующие на поверхности (в тонком слое) выделенного тела. Пространственные силы (тяжести, инерции, электромагнитных полей и др.) характеризуются удельными силами $\vec{f} = \delta\vec{F}/\delta m$. К пространственным можно также отнести и так называемые *технические* силы, которые возникают при взаимодействии потока с лопатками турбины или компрессора; эти силы направлением в пространстве не конкретизируются, а работа этих сил определяется из самих уравнений энергии или моментов импульса. Поверхностные же силы (силы давления, силы внутреннего трения) характеризуются своим *напряжением*, определяемым как предел отношения поверхностной силы, действующей на площадке, к площади этой площадки при устремлении последней к нулю.

Векторы напряжений поверхностных сил, действующих на площадках, перпендикулярных осям координат, могут быть представлены в таком виде [1]

$$\left.\begin{aligned} \vec{p}_x &= p_{xx}\vec{i} + p_{xy}\vec{j} + p_{xz}\vec{k} = -p\vec{i} + \vec{p}'_x\,; \\ \vec{p}_y &= p_{yx}\vec{i} + p_{yy}\vec{j} + p_{yz}\vec{k} = -p\vec{j} + \vec{p}'_y\,; \\ \vec{p}_z &= p_{zx}\vec{i} + p_{zy}\vec{j} + p_{zz}\vec{k} = -p\vec{k} + \vec{p}'_z\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Из (4) следует очевидное соотношение

$$\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} = -\mathrm{grad}\, p + \frac{\partial \vec{p}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}'_z}{\partial z}\,. \tag{5}$$

Девять проекций напряжений в (4) образуют тензор P с компонентами P_{ij} (где i= 1,2,3 или x, y, z; j= 1,2,3, или x,y,z).

Связь компонент тензора напряжений p_{ij} с давлением и скоростями деформаций устанавливается обобщённым законом Ньютона [1]

$$p_{ij} = p_{ji} = -p\delta_{ij} + p'_{ij} = -p\delta_{ij} + (\mu' - \tfrac{2}{3}\mu)\delta_{ij}\,\mathrm{div}\,\vec{c} + \mu\,(\partial c_i/\partial x_j + \partial c_j/\partial x_i), \tag{6}$$

где

$$\left.\begin{aligned} p'_{ji} &= (\mu' - \tfrac{2}{3}\mu)\,\mathrm{div}\,\vec{c} + 2\mu\,(\partial c_i/\partial x_i) \quad \text{при } j = i, \\ p'_{ji} &= p_{ji} = \mu\,(\partial c_i/\partial x_j + \partial c_j/\partial x_i) \quad \text{при } j \neq i, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

– компоненты (вязкостные) тензора напряжений, обусловленные вязкостью; σ_{ij}=1– символ Кронекера, определяемый условиями: σ_{ij}=1 при $i = j$ и σ_{ij} =1 при $i \neq j$;

μ' – вторая вязкость, которая проявляется только при быстром изменении объёма, например, при взрывах, прохождении газа сквозь скачок уплотнения и др.

В выражениях (4) и (6), как и далее, под гидродинамическим давлением p, отождествляемым с термодинамическим давлением, понимается среднее арифметическое значение $\overline{\sigma}$ нормальных напряжений на три взаимно-перпендикулярные площадки, взятое с обратным знаком[1] $p \equiv p_{\text{гд}} = -(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})/3 = -\overline{\sigma}$.

Работа сил давления по перемещению элемента среды как целого. Выражение для этой работы легко получить в случае рассмотрения одномерного нестационарного потока. Выделим в канале (рис. 1) элемент потока толщиной δx и площадью поперечного сечения A. Если в сечении x действует давление p, то в сечении $x + \delta x$ будет действовать давление $p + \frac{\partial p}{\partial x}\delta x$.

[1] В результате такого введения давления в выражениях для компонент напряжений появляется добавочный член $(2/3)\mu\,\mathrm{div}\,\vec{c}$, а в выражении для расчёта изменения энтропии отрицательный член $(-2/3)\mu(\mathrm{div}\,\vec{c})^2$, уменьшающий энтропию (последнее противоречит второму закону термодинамики). Исключить отрицательный член в формуле для расчёта изменения энтропии при диссипации позволяет введение давления по формуле $p \equiv p_{\text{тер}} = -\overline{\sigma} + (2/3)\mu\,\mathrm{div}\,\vec{c}$ [3].

Тогда проекция результирующей сил давления на ось x, приложенная в центре инерции элемента потока, определится выражением

$$\delta F_{\text{рез}_x} = pA - (p + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} \delta \mathrm{x})\, A = -\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} \delta \mathrm{x}\, A = -\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} \delta V,$$

а составляющая вектора этой силы в направлении оси x будет равна $-\frac{\partial p}{\partial x} \delta V \vec{i}$.

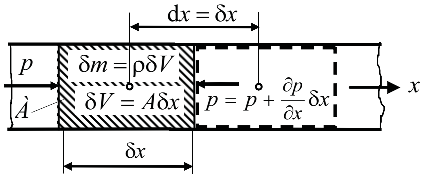

Рисунок 1 – К расчёту работы перемещения сил давления

В случае трёхмерного течения вектор результирующей сил давления, действующих на всю поверхность элемента потока, определится выражением

$$\delta \vec{F}_{\text{рез}} = -(\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} \vec{i} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial z} \vec{k}) \delta V \equiv -\mathrm{grad}\, p \delta V \cdot$$

В случае пространственного нестационарного течения *внешняя*[2] работа результирующей внешних сил давления (работа перемещения) будет равна

$$\begin{aligned} &\delta^2 W'_{\text{дав.пер}} = \delta \vec{F}_{\text{рез}} \mathrm{d}\vec{s} = -\mathrm{grad}\, p \cdot \mathrm{d}\vec{s}\, \delta V = \\ &= -(\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} \mathrm{d\,x} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{y}} \mathrm{d\,y} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{z}} \mathrm{d\,z})\, \delta V \equiv -\partial p_{\text{конв}} \delta V = -\upsilon\, \partial p_{\text{конв}} \delta m, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\tilde{o} = \delta V / \delta m$ – удельный объём жидкой среды; $\mathrm{d}\vec{s} = \vec{i}\,\mathrm{d}x + \vec{j}\,\mathrm{d}y + \vec{k}\,\mathrm{d}z = \vec{c}\,\mathrm{d}t$ – вектор элементарного перемещения центра инерции элемента среды.

Здесь символом $\partial ð_{\hat{e}\hat{i}\acute{i}\hat{a}}$ обозначено конвективное приращение давления, обусловленное приращением координат,

$$\partial p_{\text{конв}} = \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} \mathrm{d\,x} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{y}} \mathrm{d\,y} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{z}} \mathrm{d\,z} \equiv \mathrm{grad}\, p \cdot \mathrm{d}\vec{s} \equiv \mathrm{grad}\, p \cdot \vec{c}\,\mathrm{d}t \cdot$$

Конвективное приращение входит в состав полного приращения давления

$$\mathrm{d}p = \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{t}} \mathrm{d\,t} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} \mathrm{d\,x} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{y}} \mathrm{d\,y} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{z}} \mathrm{d\,z} = \partial p_{\text{лок}} + \partial p_{\text{конв}},$$

[2] Знак *внешней работы* совпадает со знаком изменения энергии системы: $\delta W' = \mathrm{d}E$.

где $\partial p_{\text{лок}} = \dfrac{\partial\, \mathrm{p}}{\partial\, \mathrm{t}} \mathrm{d\,t}$ – локальное приращение давления, обусловленное переменностью (нестационарностью) поля давления.

Полная работа сил давления в потоке. В общем случае элемент потока в форме параллелепипеда (рис. 2) под действием сил давления не только перемещается в пространстве, но и деформируется. Поэтому при определении полной работы сил давления нужно учесть то обстоятельство, что противоположные грани параллелепипеда перемещаются на различные расстояния, отличающиеся на длину деформации его рёбер: d (σx), d (σy) и d (σz) (см. рис. 2).

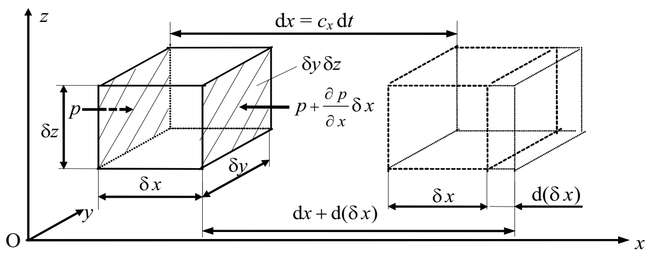

Рисунок 2 – К расчёту работ деформации и перемещения сил давления

Так, если под действием сил давления $p\,\delta y\,\delta z$, действующих на левую грань параллелепипеда, она перемещается на расстояние $\mathrm{d}x$ и при этом совершается работа $p\,\delta y\,\delta z\,\mathrm{d}x$, то под действием сил давления $(p + \frac{\partial p}{\partial x}\delta x)\delta y\,\delta z$, действующих в тот же момент времени на правую грань, последняя перемещается на $\mathrm{d}x + \mathrm{d}(\delta x)$ и при этом совершается работа $-(p + \frac{\partial p}{\partial x}\delta x)\delta y\,\delta z[\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}(\delta x)]$ (минус, так как сила и перемещение имеют противоположные направления).

Тогда полная работа сил давления в направлении оси x будет равна сумме этих работ $\delta^2 W'_{\text{дав}_x} = p\,\delta y\,\delta z\,\mathrm{d}x - (p + \frac{\partial\, \mathrm{p}}{\partial\, \mathrm{x}}\delta\, \mathrm{x})[\mathrm{d}x + \mathrm{d}(\delta x)]\delta y\,\delta z.$

Раскрывая произведение и пренебрегая величиной высшего порядка малости $(-\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}(\delta x)\delta V)$, а также учитывая, что $(\mathrm{d}\,\delta V)_x = \delta y\,\delta z\,(\mathrm{d}\,\delta x)$, получим

$$\delta^2 W'_{\text{дав}_x} = -p\,\mathrm{d}(\delta V)_x - \frac{\partial\, \mathrm{p}}{\partial\, \mathrm{x}}\mathrm{d\,x}\,\delta V$$

С учётом работ в других направлениях работа сил давления определится так

$$\delta^2 W'_{\text{дав}} = -p\,\mathrm{d}(\delta V) - (\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}\,x + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}\,y + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}\,z)\delta V = -p\,\mathrm{d}\,\upsilon\,\delta m - \upsilon\,\partial p_{\text{конв}}\,\delta m =$$

$$= \delta^2 W'_{\text{дав.деф}} + \delta^2 W'_{\text{дав.пер}} = -p\,\mathrm{div}\,\vec{c}\,\mathrm{d}t\,\delta V - \mathrm{grad}\,p\cdot\vec{c}\,\mathrm{d}t\,\delta V \equiv -\mathrm{div}(p\vec{c})\,\mathrm{d}t\,\delta V. \quad (9)$$

Здесь сделаны такие замены: $\delta V/\delta m = \upsilon = 1/\rho$, $\mathrm{d}(\delta V)/\delta m = \mathrm{d}(\delta V/\delta m) = \mathrm{d}\,\upsilon$,

$\operatorname{div}\vec{c} = \rho\, d\upsilon/dt$ – из уравнения неразрывности

$$d\rho/dt + \rho \operatorname{div}\vec{c} = d(1/\upsilon)/dt + \rho \operatorname{div}\vec{c} = 0.$$

Если все члены уравнения (9) разделить на массу δm, то получим выражение для удельных работ сил давления в случае нестационарного течения

$$\delta w'_{\text{дав}} = \delta w'_{\text{дав.деф}} + \delta w'_{\text{дав.пер}} = -p\, d\upsilon - \upsilon\, \partial p_{\text{конв}} = \\ = -p\, d\upsilon - \upsilon\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = -d(p\upsilon) + \upsilon\frac{\partial p}{\partial t}dt. \quad (10)$$

Таким образом, полная (суммарная) работа внешних сил давления складывается из внешних работ деформации элемента среды (работы изменения объёма) и его перемещения как целого (работы перемещения). Следовательно, более общей работой является полная работа сил давления, а не работа изменения объёма, как часто считают в термодинамике.

В случае стационарного (установившегося) течения изменение давления в элементе среды при его перемещении из одного сечения канала в другое происходит только в результате приращения координат и (10) принимает такой вид:

$$\delta w'_{\text{дав.стац}} = \delta w'_{\text{дав.деф}} + \delta w'_{\text{дав.пер}} = \\ = -p\, d\upsilon - \upsilon\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = -(p\, d\upsilon + \upsilon\, dp) = -d(p\upsilon) = -\delta w_{\text{прот}},$$

В случае стационарного течения ($\partial p_{\text{лок}} = 0$) полную работу внутренних сил (*внутреннюю работу*[3]*) давления (получаемую в термодинамике при рассмотрении открытых систем), равную работе внешних (со штрихом) сил давления, взятой с противоположным знаком, принято называть удельной работой проталкивания* [4]

$$\delta w_{\text{прот}} = \delta w_{\text{дав.стац}} = -\delta w'_{\text{дав.стац}} = \delta w_{\text{дав.деф}} + \delta w_{\text{дав.пер}} = p\, d\upsilon + \upsilon\, dp = d(p\upsilon).$$

Полная работа вязкостных сил. В общем случае элемент потока в форме параллелепипеда под действием вязкостных сил не только перемещается в пространстве, но и деформируется (рис. 3). При этом происходит не только деформация рёбер параллелепипеда, но и смещение его граней друг относительно друга (угловая деформация, или искажения прямого угла).

[3] Знак *внутренней работы* противоположен знаку изменения энергии системы $\delta W = -\delta W' = -dE$.

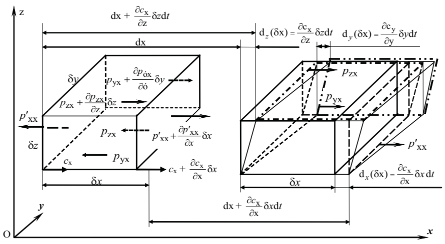

Рисунок 3 – К расчёту работ деформации и перемещения сил вязкости

Определим полную работу вязкостных сил с напряжениями p'_{ij} (7) подобно тому, как была определена полная работа сил давления. Работа вязкостных сил в направлении оси x (величиной высшего порядка малости пренебрегаем)

$$\delta^2 W'_{\text{вяз}_x} = -p'_{xx}\,\delta y\,\delta z\,\mathrm{d}x + (p'_{xx} + \frac{\partial p'_{xx}}{\partial x}\delta x)\,\delta y\,\delta z\,(\mathrm{d}x + \frac{\partial c_x}{\partial x}\delta x\,\mathrm{d}t) - p_{yx}\,\delta x\,\delta z\,\mathrm{d}x +$$
$$+ (p_{yx} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y}\delta y)\,\delta x\,\delta z\,(\mathrm{d}x + \frac{\partial c_x}{\partial y}\delta y\,\mathrm{d}t) - p_{zx}\,\delta x\,\delta y\,\mathrm{d}x + (p_{zx} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\delta z)\,\delta x\,\delta y\,(\mathrm{d}x + \qquad (11)$$
$$+ \frac{\partial c_x}{\partial z}\delta z\,\mathrm{d}t) = (\frac{\partial p'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z})\,\delta V\,\mathrm{d}x + (p'_{xx}\frac{\partial c_x}{\partial x} + p_{yx}\frac{\partial c_x}{\partial y} + p_{zx}\frac{\partial c_x}{\partial z})\,\delta V\,\mathrm{d}t$$

Первый трёхчлен, включающий проекцию результирующей сил вязкости на ось x $\delta F_{\text{рез.вяз}_x} = (\frac{\partial p'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z})\delta V = (\frac{\partial \vec{p}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}'_z}{\partial z})_x \delta V$,

выражает работу вязкостных сил по перемещению центра инерции элемента среды на расстояние $\mathrm{d}x = c_x\,\mathrm{d}t$

$$\delta^2 W'_{\text{вяз.пер}_x} = \delta F_{\text{рез.вяз}_x}\,\mathrm{d}x = (\frac{\partial p'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z})\,\delta V\,\mathrm{d}x = \frac{\partial p'_{jx}}{\partial x_j}\,\delta V\,\mathrm{d}x.$$

Подставляя вместо напряжений p'_{ij} их выражения через скорости деформаций (7) для $i = x$ и $j = x, y, z$ и считая динамическую вязкость μ постоянной, получим

$$\delta^2 W'_{\text{вяз.пер}_x} = \left[(\mu' - \tfrac{2}{3}\mu)\frac{\partial \operatorname{div}\vec{c}}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \mu(\frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial x\,\partial y}) + \mu(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2})\right]\delta V\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\mu(\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2}) + \mu\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z}) + (\mu' - \tfrac{2}{3}\mu)\frac{\partial \operatorname{div}\vec{c}}{\partial x}\right]\delta V\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\mu\,\Delta c_x + (\mu' + \tfrac{1}{3}\mu)\frac{\partial \operatorname{div}\vec{c}}{\partial x}\right]\delta V\,\mathrm{d}x = (\frac{\partial \vec{p}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}'_z}{\partial z})_x\,\mathrm{d}x\,\delta V$$

С учётом двух других направлений работа вязкостных сил по перемещению элемента среды как целого определится выражением

$$\delta^2 W'_{\text{вяз.пер}} = (\frac{\partial \vec{p}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}'_z}{\partial z})\cdot \mathrm{d}\vec{s}\,\delta V = \left[\mu\,\Delta\vec{c} + (\mu' + \tfrac{1}{3}\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{c}\right]\cdot \mathrm{d}\vec{s}\,\delta V, \qquad (12)$$

где $(\frac{\partial \vec{p}'_x}{\partial x}+\frac{\partial \vec{p}'_y}{\partial y}+\frac{\partial \vec{p}'_z}{\partial z})\delta V=\delta\vec{F}_{\text{рез.вяз}}$ – вектор результирующей сил вязкости по перемещению элемента среды как целого (по перемещению его центра инерции).

В общем случае для отдельной макрочастицы (жидкой частицы) эта работа может иметь любой знак, т. е. отдельная макрочастица может ускоряться соседними жидкими частицами (слоями жидкости) или замедляться. Однако в случае рассмотрения подвижного элемента среды, соприкасающегося со стенками канала, всегда происходит торможение его силами вязкости, т. е. работа внешних сил вязкости отрицательна $(\frac{\partial \vec{p}'_x}{\partial x}+\frac{\partial \vec{p}'_y}{\partial y}+\frac{\partial \vec{p}'_z}{\partial z})\delta V=\delta\vec{F}_{\text{рез.вяз}}$.

Второй трёхчлен в (11) представляет собой сумму работ вязкостных сил (работу деформации) по относительному перемещению граней параллелепипеда вследствие разности их скоростей на dx (δx), dy (δx) и dz (δx) (см. рис. 3).

$$\delta^2 W'_{\text{вяз.деф}_x}=p'_{xx}\,\delta y\delta z\,\mathrm{d}_x(\delta x)+p_{yx}\delta x\delta z\,\mathrm{d}_y(\delta x)+p_{zx}\delta x\delta y\,\mathrm{d}_z(\delta x)=$$
$$=(p'_{xx}\frac{\partial c_x}{\partial x}+p_{yx}\frac{\partial c_x}{\partial y}+p_{zx}\frac{\partial c_x}{\partial z})\delta V\,\mathrm{d}t\equiv p'_{jx}\frac{\partial c_x}{\partial x_j}\delta V\,\mathrm{d}t.$$

Подставляя вместо напряжений p'_{ji} их выражения через скорости деформаций (7) и принимая вязкость не зависящей от координат $(\partial\mu/\partial x_j=0)$, получим

$$\delta^2 W'_{\text{вяз.деф}_x}=\Big[(\mu'-\tfrac{2}{3}\mu)\operatorname{div}\vec{c}\,\frac{\partial c_x}{\partial x}+2\mu(\frac{\partial c_x}{\partial x})^2+\mu(\frac{\partial c_y}{\partial x}+\frac{\partial c_x}{\partial y})\frac{\partial c_x}{\partial y}+\mu(\frac{\partial c_z}{\partial x}+\frac{\partial c_x}{\partial z})\frac{\partial c_x}{\partial z}\Big]\delta V\mathrm{d}t.$$

С учётом двух других направлений выражение для работы вязкостных сил по деформации элемента среды примет вид

$$\begin{aligned}\delta^2 W'_{\text{вяз.деф}}=p'_{ji}\frac{\partial c_i}{\partial x_j}\delta V\,\mathrm{d}t=\Big\{(\mu'-\tfrac{2}{3}\mu)(\operatorname{div}\vec{c})^2+2\mu\Big[(\frac{\partial c_x}{\partial x})^2+(\frac{\partial c_y}{\partial y})^2+(\frac{\partial c_z}{\partial z})^2\Big]+\\+\mu(\frac{\partial c_x}{\partial y}+\frac{\partial c_y}{\partial x})^2+\mu(\frac{\partial c_y}{\partial z}+\frac{\partial c_z}{\partial y})^2+\mu(\frac{\partial c_z}{\partial x}+\frac{\partial c_x}{\partial z})^2\Big\}\delta V\mathrm{d}t=\mu\,D\delta V\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{13}$$

где D (отношение выражения в фигурных скобках к динамической вязкости μ) называется *диссипативной функцией* (функцией диссипации, рассеяния).

Работа сил вязкости при деформации элемента вызывает изменение энергии хаотического (теплового) движения, т. е. приводит к росту внутренней энергии данного элемента среды. Следовательно, внешняя работа сил вязкости по деформации элемента всегда положительна $\delta^2 W'_{\text{вяз.деф}}=\mu\,D\delta V\,\mathrm{d}t>0$.

Полная работа вязкостных сил с учётом (12) и (13) примет вид

$$\delta^{2}W'_{\text{вяз}} = \delta^{2}W'_{\text{вяз.пер}} + \delta^{2}W'_{\text{вяз.деф}} = \left[\mu\,\Delta\vec{c} + (\mu' + \tfrac{1}{3}\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{c}\,\right]\cdot \mathrm{d}\vec{s}\,\delta V + \mu\, D\delta V\,\mathrm{d}t. \qquad (14)$$

Классификация уравнений энергии в зависимости от вида движения микрочастиц системы. В общем случае в потоке абсолютное движение микрочастиц вещества относительно неподвижных стенок канала можно представить в виде суммы хаотического (относительного) движения относительно подвижного их центра инерции и упорядоченного (направленного) движения этих частиц относительно системы координат, связанной с неподвижными стенками канала (переносного движения центра инерции системы).

Согласно закону сохранения энергии изменение энергии системы $\mathrm{d}E$ складывается из суммы *внешней* (индекс «е») теплоты δQ^{e} и внешних (штрих) работ $\delta W_i'$ (знак внешних работ, как уже отмечалось, совпадает со знаком $\mathrm{d}E$)

$$\mathrm{d}E = \delta Q^{\mathrm{e}} + \sum_{i=1}^{N} \delta W_i' \qquad (15)$$

Учитывая независимость отдельных видов движения (хаотического, упорядоченного и абсолютного) для каждого из них, исходя из общего балансового уравнения изменения энергии системы (15), можно получить частные выражения – частные балансовые соотношения для изменений соответствующих энергий – внутренней; кинетической и полной.

Уравнение энергии для УД элемента среды как целого. В случае рассмотрения только одного УД под энергией E в (15) следует понимать кинетическую энергию (КЭ) малого элемента среды δE_k, изменение которой происходит только за счёт совершения работ по *перемещению* элемента среды как целого (при совершении работы деформации и в процессе теплообмена энергия УД не изменяется, т. е. теплота в (15) опускается и работа деформации не рассматривается).

Подставляя (8) и (12) в правую часть (15) с учётом (5), получим уравнение изменения кинетической энергии малого элемента среды в таком виде:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\delta E_k) &= \delta m\,\mathrm{d}c^2/2 = \delta^{2}W'_{\text{прос}} + \delta^{2}W'_{\text{пов.пер}} = \delta^{2}W'_{\text{прос}} + \delta^{2}W'_{\text{дав.пер}} + \delta^{2}W'_{\text{вяз.пер}} = \\ &= \delta m\,\vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{s} - \upsilon\,\partial p_{\text{конв}}\,\delta m + \left[\mu\,\Delta\vec{c} + (\mu' + \tfrac{1}{3}\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{c}\,\right]\cdot \mathrm{d}\vec{s}\,\delta V = \delta m\,\vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{s} - \qquad (16) \\ &- \mathrm{grad}\,p\,\mathrm{d}\vec{s}\,\delta V + \left(\frac{\partial\,\vec{\mathrm{p}}'_x}{\partial\,\mathrm{x}} + \frac{\partial\,\vec{\mathrm{p}}'_y}{\partial y} + \frac{\partial\,\vec{\mathrm{p}}'_z}{\partial z}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{s}\,\delta V \equiv \delta m\,\vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{s} + \delta\vec{F}_{\text{рез.пов}}\,\mathrm{d}\vec{s}, \end{aligned}$$

Здесь вектор результирующей поверхностных сил по перемещению элемента среды как целого определяется по формуле (формула в таком виде приводится впервые)

$$\delta\vec{F}_{\text{рез.пов}} = \delta\vec{F}_{\text{рез.дав}} + \delta\vec{F}_{\text{рез.вяз}} = -\operatorname{grad} p\,\delta V + \left(\frac{\partial \vec{p}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}'_z}{\partial z}\right)\delta V = \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}\right)\delta V.$$

Если все члены уравнения (16) разделить на объём δV и время $\mathrm{d}t$, то получим гидромеханический вид записи уравнения энергии для УД (для скорости изменения объёмной КЭ элемента потока, Вт/м^3)

$$\rho\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{c^2}{2} = N_{V\text{прос}} + N_{V\text{пов.пер}} = N_{V\text{прос}} + N_{V\text{дав.пер}} + N_{V\text{вяз.пер}} = \rho\,\vec{f}\cdot\vec{c} -$$

$$-\vec{c}\cdot\operatorname{grad} p + \left[\mu\,\Delta\vec{c} + (\mu' + \tfrac{1}{3}\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{c}\,\right]\cdot\vec{c} = \rho\,\vec{f}\cdot\vec{c} + \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}\right)\cdot\vec{c}\,, \qquad (17)$$

где $N_{V\text{прос}} = \rho\,\vec{f}\cdot\vec{c}$, $N_{V\text{дав.пер}} = -\vec{c}\cdot\operatorname{grad} p$ и $N_{V\text{вяз.пер}} = \left(\frac{\partial \vec{p}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}'_z}{\partial z}\right)\cdot\vec{c}$ – объёмные мощности соответственно пространственных сил и поверхностных сил давления и вязкости по перемещению элемента потока как целого.

Сравнивая уравнения (2) и (17), заключаем, что сумма величин $\operatorname{div}(P\vec{c}) + N_{in}$ представляет собой объёмную мощность поверхностных сил по перемещению элемента среды как целого $N_{V\text{пов.пер}} = \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}\right)\cdot\vec{c}$ (именно эта величина не конкретизируется в теории МЖГ, а рассматривается только сумма $\operatorname{div}(P\vec{c}) + N_{in}$).

Если все члены уравнения (16) разделить на массу δm и ввести выражения для удельных работ силы тяжести $\delta w'_{\text{тяж}} = \vec{f}_{\text{тяж}}\,\mathrm{d}\vec{s} = -g\,\mathrm{d}z$ и внутренней (по знаку) технической работы $\delta w_{\text{тех}} = -\delta w'_{\text{тех}}$, то получим уравнение энергии для УД (в термодинамике его называют *уравнением энергии в механическом виде*)

$$\mathrm{d}c^2/2 = -g\,\mathrm{d}z - \upsilon\,\partial p_{\text{конв}} - \delta w_{\text{тр}} - \delta w_{\text{тех}}, \qquad (18)$$

или

$$-\upsilon\,\mathrm{d}p = g\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}c^2/2 + \delta w_{\text{тр}} + \delta w_{\text{тех}} - \upsilon\frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

где $\delta w_{\text{тр}} = -\delta w'_{\text{вяз.пер}} = -\frac{1}{\rho}\left[\mu\,\Delta\vec{c} + (\mu' + \tfrac{1}{3}\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{c}\,\right]\cdot\mathrm{d}\vec{s}$ – внутренняя (по знаку) удельная работа трения, отождествляемая с работой внутренних сил вязкости по перемещению элемента среды как целого.

Уравнение энергии для абсолютного движения. В случае рассмотрения АД, представляющего собой сумму хаотического и упорядоченного движения, под энергией E в (15) следует понимать полную энергию – сумму внутренней энергии (ВЭ) δU и КЭ δE_k. Поскольку изменение ВЭ происходит в результате подвода тепла и деформации элемента среды, то в правую часть (15), наряду с работами по перемещению элемента, должны войти и работы по его деформации, а также внешняя теплота. Тогда с учётом (9) и (13) уравнение (15) примет вид

$$\mathrm{d}(\delta E)=\mathrm{d}(\delta U+\delta E_k)=\mathrm{d}(u+c^2/2)\,\delta m=\delta^2 Q^e+\delta^2 W'_{\text{прос}}+\delta^2 W'_{\text{дав.деф}}+$$
$$+\delta^2 W'_{\text{дав.пер}}+\delta^2 W'_{\text{вяз.пер}}+\delta^2 W'_{\text{вяз.деф}}=\delta q^e\delta m+\vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{s}\,\delta m-p\,\mathrm{d}\upsilon\,\delta m-$$
$$-\upsilon\,\partial p_{\text{конв}}\,\delta m+\left[\mu\,\Delta\vec{c}+(\mu'+\tfrac{1}{3}\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{c}\,\right]\cdot \mathrm{d}\vec{s}\,\delta V+\mu\,D\,\delta V\,\mathrm{d}t. \qquad (19)$$

Разделив все члены этого уравнения на объём δV и время $\mathrm{d}t$ и учитывая (9), получим гидромеханический вид записи уравнения энергии для АД (Вт/м³)

$$\rho\,\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u+c^2/2)=\rho\dot{q}^e+N_{V\text{прос}}+N_{V\text{пов.пер}}+N_{V\text{пов.деф}}=\rho\dot{q}^e+\rho\,\vec{f}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\mathrm{grad}\,p+$$
$$+\left[\mu\,\Delta\vec{c}+(\mu'+\tfrac{1}{3}\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{c}\,\right]\cdot\vec{c}+(-p\,\mathrm{div}\,\vec{c}+\mu\,D)=\rho\dot{q}^e+N_{V\text{прос}}+N_{V\text{дав}}+$$
$$+N_{V\text{вяз}}=\rho\dot{q}^e+\rho\,\vec{f}\cdot\vec{c}-\mathrm{div}\,(p\vec{c})+\left[\mu\,\Delta\vec{c}+(\mu'+\tfrac{1}{3}\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{c}\,\right]\cdot\vec{c}+\mu\,D, \qquad (20)$$

где $\dot{q}^e=\delta q^e/\mathrm{d}\,t$ – удельный внешний тепловой поток (массовая плотность суммарного внешнего теплового потока), Вт/кг.

Прибавляя к левой и правой частям уравнения (20) величину $\rho\,\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\,\upsilon)=$ $=\tfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\rho p\,\tfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=\tfrac{\partial p}{\partial t}+\vec{c}\cdot\mathrm{grad}\,p+p\,\mathrm{div}\,\vec{c}=\tfrac{\partial p}{\partial t}+\mathrm{div}\,(p\vec{c})$ и вводя энтальпию $h=u+p\,\tilde{o}$, получим ещё один гидромеханический вид записи уравнения энергии

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h+c^2/2)=\frac{\partial p}{\partial t}+\rho\,\vec{f}\cdot\vec{c}+\left[\mu\,\Delta\vec{c}+(\mu'+\frac{1}{3}\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{c}\,\right]\cdot\vec{c}+\mu\,D+\rho\dot{q}^e\,.$$

Если все члены уравнения (19) разделить на массу δm, а в качестве работ пространственных сил взять работу силы тяжести и техническую работу, то получим термодинамический вид записи уравнения энергии для АД (Дж/кг)

$$\mathrm{d}\,(u+c^2/2)=\delta q^e-g\,\mathrm{d}z-\delta w_{\text{тех}}-p\,\mathrm{d}\,\upsilon-\upsilon\,\partial p_{\text{конв}}-\delta w_{\text{тр}}+\delta w'_{\text{вяз.деф}}$$

или
$$\delta q^e+\delta q_{\text{тр}}=g\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}\,c^2/2+\mathrm{d}h-\upsilon\,(\partial p/\partial t)\,\mathrm{d}t+\delta w_{\text{тех}}+\delta w_{\text{тр}}, \qquad (21)$$

где $\delta q_{\text{тр}}=\delta w'_{\text{вяз.деф}}=\nu\,D\,\mathrm{d}t$ – удельная теплота трения ($\nu=\mu/\rho$).

В термодинамике уравнение энергии для нестационарного потока в виде (21) не приводится. В случае стационарного течения $(\partial p/\partial t=0)$ и пренебрежения отводом теплоты трения в окружающую среду ($\delta q_{\text{тр}}=\delta w_{\text{тр}}$ или $\delta w'_{\text{вяз.деф}}+\delta w'_{\text{вяз.пер}}=0$) уравнение (21) принимает общеизвестный вид $\delta q^e=g\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}\,c^2/2+\mathrm{d}h+\delta w_{\text{тех}}$ и называется *уравнением первого закона термодинамики для потока* (*проточной системы*) [5].

Вычитая из уравнений энергии для АД (20) и (21) соответственно уравнения энергии для УД (17) и (18), получим уравнения энергии для ХД соответственно в гидромеханическом и термодинамическом (1) виде:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho\dot{q}^e + N_{V\text{пов.деф}} = \rho\dot{q}^e + N_{V\text{дав.деф}} + N_{V\text{вяз.деф}} = \rho\dot{q}^e - p\,\mathrm{div}\,\vec{c} + \mu\,D; \quad (22)$$

$$\mathrm{d}u = \delta q^e - p\,\mathrm{d}\upsilon + \delta w'_{\text{вяз.деф}} = \delta q^e + \delta q_{\text{тр}} - p\,\mathrm{d}\upsilon = \delta q - p\,\mathrm{d}\upsilon,\ \text{или}\ \delta q = \mathrm{d}h - \upsilon\,\mathrm{d}p. \quad (23)$$

Сравнивая полученное уравнение (22) с аналогичным уравнением (2), заключаем, что так называемая *мощность внутренних сил* N_{in} равна и противоположна по знаку объёмной мощности поверхностных сил по деформации элемента среды ($-N_{V\text{пов.деф}}$), а мощность диссипации $N_{\text{дис}}$ равна объёмной мощности деформации элемента среды только под действием сил вязкости ($N_{\text{дис}} = N_{V\text{вяз.деф}} = \mu\,D$).

Заключение. Термодинамический метод вывода уравнений энергии для потока, основанный на расчёте четырёх видов работ поверхностных сил ($W_{\text{дав.пер}}$, $W_{\text{дав.деф}}$, $W_{\text{вяз.пер}}$, $W_{\text{вяз.деф}}$), дополняет гидромеханический метод, основанный на понятии объёмной мощности N_V, и позволяет дать однозначный физический смысл величин, получаемых в гидромеханическом методе вывода уравнений энергии для потока, в виде различного рода работ соответствующих сил и их мощностей:

$\mathrm{div}(P\vec{c}) = N_{V\text{пов}} = N_{V\text{пов.пер}} + N_{V\text{пов.деф}}$ – объёмная мощность поверхностных сил по перемещению и деформации элемента среды, Вт/м^3;

$N_{in} = -N_{V\text{пов.деф}} = -(N_{V\text{дав.деф}} + N_{V\text{вяз.деф}})$ – объёмная мощность поверхностных сил (с обратным знаком) по деформации элемента среды под действием сил давления и вязкости, Вт/м^3;

$\mathrm{div}(P\vec{c}) + N_{in} = N_{V\text{пов.пер}} = N_{V\text{дав.пер}} + N_{V\text{вяз.пер}}$ – объёмная мощность поверхностных сил по перемещению элемента среды как целого, Вт/м^3;

$N_{\text{дис}} = N_{V\text{вяз.деф}}$ – объёмная мощность вязкостных сил по деформации элемента среды, Вт/м^3;

$-\upsilon\,\mathrm{d}p = \delta w'_{\text{дав.пер}}$ – удельная работа результирующей сил давления по перемещению элемента среды как целого (в стационарном потоке), а в общем случае (потока и цилиндра) – работа изменения давления δw^p (по аналогии с работой изменения объёма $\delta w \equiv \delta w^V = p\,\mathrm{d}\tilde{o}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1987. - 848 с. ил.

2. Рындин В. В. Анализ методов вывода уравнений энергии в механике жидкости и газа //Наука и техника Казахстана.– 2009. – № 2. - С. 87–99..

3. Рындин В.В. Анализ методов введения давления вязкой жидкости в механике жидкости и газа //Наука и техника Казахстана.– 2009. – № 2. - С. 75–86..

4. Кириллин В.А., Сычев В.В. и Шейндлин А.Е. Техническая термодинамика: Учеб. для вузов. – Изд. 4-е. - М.: Энергоатомиздат, 1983. - 448 с.: ил.

5. Техническая термодинамика: Учеб. для машин. спец. вузов /В. И. Крутов, С.И. Исаев, И.А. Кожинов и др.; Под ред. В.И. Крутова. – 3-е изд. - М.: Высш. шк., 1991. - 384 с.: ил.