

УДК 624.073.2:534.014.2.001.24

## РАСЧЕТ НА ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

С.К. Ельмуратов, А.Ф. Ельмуратова

*Павлодарский государственный университет*

*им. С. Торайгырова*

*Есептердің көрсетілген сыныбын жұмыста, құрамалы шекті шарттары бар серпінді негізде тік төртбұрышты тақталарды жобалаудағы жаттығу құндылығын ұсынады.*

*In this paper we presented a class of problems is of practical value in the design of rectangular plates on elastic foundations with combined boundary conditions.*

Обзор работ по оболочкам и пластинам показывает, что исследования по вынужденным колебаниям пластин и оболочек в литературе весьма ограничены в сравнении с задачами о свободных колебаниях и устойчивости. Мало изучено влияние локальных нагрузок на тонкие пластины и оболочки. Имеются отдельные работы с численными результатами расчета пластин. Решение для шарнирно опертой с учетом массы в точке приложения вибрационной нагрузки приведена в работе [1]. Дается пример расчета квадратной изотропной пластины. Вибрационная нагрузка и сосредоточенная масса приложены в центре пластины. Решения получены в двойных тригонометрических рядах. В работе [2] предлагается исследование вынужденных колебаний и пластин с использованием метода Галеркина для вычисления прогибов и изгибающих моментов. Приводятся численные примеры расчета, сведенные в таблицы. Но такие работы крайне редко встречаются в литературе. Это, очевидно, объясняется тем, что задачи по вынужденным колебаниям сооружений носят индивидуальный характер, так как всегда связаны с конкретными динамическими нагрузками. Однако, в строительной практике именно вынужденные колебания являются решающим динамическим критерием проектирования, а свободные колебания сооружений исследуются в

первую очередь с позиции возможного резонанса в процессе эксплуатации сооружения.

Рассмотрим ортотропную пластину под действием сосредоточенных поперечных динамических нагрузок, а также с учетом сосредоточенных и равномерно распределенных масс при различных граничных условиях. Будем также учитывать упругое основание.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний ортотропной пластины имеет вид [3]:

$$D_1 W_{,xxxx} + 2D_3 W_{,xxyy} + D_2 W_{,yyyy} + \frac{q}{g} W_{,tt} + KW = F \quad (1)$$

Здесь  $F$  – поперечная динамическая нагрузка, которую будем задавать в виде гармонических колебаний, наиболее часто встречающихся в строительной практике:

$$F = R(A \cos \Theta t + B \sin \Theta t) - \frac{P}{g} W_{,tt} \quad (2)$$

где  $R$  – амплитудное значение возмущающей силы;  $W$  – прогиб пластин;  $q$  – интенсивность нагрузки на единицу площади;  $K$  – коэффициент упругости грунта;  $\Theta$  – частота возмущающей силы;  $\frac{P}{g}$  – интенсивность массы;  $D_1, D_2, D_3$  – цилиндрические жесткости, которые для ортотропного материала определяются по формулам:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_3 = D_1 \nu_2 + 2D_k, \quad D_k = Gh^3 / 12$$

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$W(x, y, t) = W(x, y)(A \cos \Theta t + B \sin \Theta t) \quad (3)$$

с учетом (2) и (3) дифференциальное уравнение (1) примет вид

$$\eta_1 W_{,xxxx} + 2W_{,xxyy} + \eta_2 W_{,yyyy} - \frac{q}{gD_3} \Theta^2 W - \frac{P}{gD_3} \Theta^2 W t + \frac{K}{D_3} W = \frac{R}{D_3} \quad (4)$$

В (4) приняты обозначения для соотношений цилиндрических жесткостей

$$\eta_1 = \frac{D_1}{D_3}, \quad \eta_2 = \frac{D_2}{D_3} \quad (5)$$

Для решения дифференциального уравнения (4) применим метод конечных разностей, заменим выражения для частных производных через конечные разности [3,4],

$$\begin{aligned}
& [\varphi_1 + (\frac{K}{D_3} - \frac{q}{gD_3} \Theta^2 W - \frac{P}{gD_3} \Theta^2 W) \lambda_1^2 \lambda_2^2] W_i + \\
& + \varphi_2 (W_K + W_l) + \varphi_3 (W_m + W_n) + \\
& + \varphi_4 (W_p + W_q + W_0 + W_r) + \varphi_5 (W_s + W_t) + \\
& + \varphi_6 (W_U + W_V) = \frac{R \lambda_1^2 \lambda_2^2}{D_3}
\end{aligned} \tag{6}$$

где коэффициенты при прогибах определяются из выражений

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{6\eta_1}{\mu^2} + 8 + 6\eta_2 \mu^2, \quad \varphi_2 = -\frac{4\eta_1}{\mu^2} - 4, \\
\varphi_3 &= -4\eta_2 \mu^2 - 4, \quad \varphi_4 = 2, \quad \varphi_5 = \frac{\eta_1}{\mu^2}, \quad \varphi_6 = \eta_2 \mu^2,
\end{aligned} \tag{7}$$

Для прямоугольных пластин  $\mu = a/b$  – соотношение сторон.

Сосредоточенные массы и возмущающие силы определяются выражениями

$$P_0 = P \lambda_1 \lambda_2, \quad R_0 = R \lambda_1 \lambda_2 \tag{8}$$

Аппроксимируем пластину регулярной сеткой и запишем уравнение (6) для  $i$ -ой точки сеточной области.

$$\begin{aligned}
& \left( \varphi_1 + \frac{K a^4}{S^4 \mu^2 D_3} - \frac{P_0 \Theta^2 a^2}{g D_3 S^2 \mu^2} - \frac{q \Theta^2 a^4}{S^4 \mu^2 D_3} \right) W_i + \\
& + \varphi_2 (W_K + W_l) + \varphi_3 (W_m + W_n) + \\
& + \varphi_4 (W_p + W_q + W_0 + W_r) + \varphi_5 (W_s + W_t) + \\
& + \varphi_6 (W_U + W_V) = \frac{R_0 a^2}{D_3 S^2 \mu^2}
\end{aligned} \tag{9}$$

где  $S$  – число шагов сетки. Точки приложения сосредоточенных масс и возмущающих сил можно принимать произвольно в любом узле сеточной области.

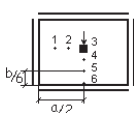
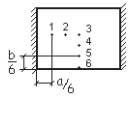
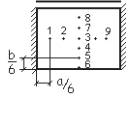
Граничные условия шарнирного опирания, защемления и свободного края могут варьироваться по любой стороне пластинки или на участке стороны. Упругое основание также может учитываться на участке пластины или по всему основанию. Программа на ЭВМ составлена для произвольного числа шагов сетки  $S$ . В зависимости от  $S$  программа автоматически формирует нужное число уравнений в конечных разностях. Задачи решались при числе шагов сетки  $S=6,8,10$ . При  $S=10$ , без уточнения значений расчета, расхождение результатов с точным

решением, которое дается для шарнирно опертой квадратной пластины [1] лежит в пределах 5%.

Исследовалось влияние внешней нагрузки и граничных условий на прогибы пластины. Значения прогибов в характерных точках пластины приведены в таблице 1. В задачах с 1 по 3 рассматривается пластина, шарнирно опертая по всему контуру. На первой схеме в таблице 1 показано, что масса и возмущающая сила приложены в центре пластины. Величина массы  $P_0$  меняется. Наибольший прогиб наблюдается в точке приложения внешней нагрузки.

Таблица 1

Результаты расчета пластины на вынужденные колебания

№ задачи	Схема пластины	K	$P_0$ 10 <sup>2</sup> кг	$R_0$ 10 <sup>2</sup> кг	Поло- жение массы $P_0$	Прогибы в отмеченных точках					
						$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$	$W_6$
1		0.0	2.0	2.0	3	0.00354	0.00660	0.00838	0.00660	0.00354	0.0
2		0.0	2.5	2.0	3	0.00401	0.00698	0.00895	0.00698	0.00401	0.0
3		10.0	2.0	2.0	3	0.00583	0.01091	0.01350	0.01350	0.01091	0.0
4		0.5	10.0	2.0	3	0.00254	0.00507	0.00676	0.00507	0.00254	0.0
5	Контур защемлен	0.5	10.0	2.0	3	0.00076	0.00225	0.00357	0.00225	0.00076	0.0
6		10.0	2.0	2.0	1	0.00131	0.00131	0.00101	0.00089	0.00081	0.00105
7		10.0	2.0	2.0	2	0.00169	0.00446	0.00415	0.00375	0.00387	0.00573
8		10.0	2.0	2.0	3	0.00138	0.00406	0.00604	0.00484	0.00411	0.00502
9		10.0	2.0	2.0	4	0.00112	0.00332	0.00463	0.00674	0.00721	0.01031
10		10.0	2.0	2.0	5	0.00072	0.00240	0.00335	0.00699	0.01355	0.02319
11		10.0	2.0	2.0	6	0.00001	0.00044	0.00075	0.00374	0.01101	0.02677
12		0.0	10.0	2.0	1,3,9	0.00148	0.00410	0.00603	0.00502	0.00437	0.00544
13		10.0	2.0	2.0	3,5,8	0.00165	0.00484	0.00712	0.00685	0.000761	0.01100

Данные приведены для квадратной пластины. В задаче 4 рассматривается эта же пластина, но с учетом упругого основания с коэффициентом упругости грунта  $K=0,5$ . Прогибы во всех узлах уменьшаются, т.к. упругое основание имеется по всей площади плиты. В задаче 5 рассматривается пластина, защемленная по всему контуру. В этих задачах сосредоточенная

масса и возмущающая сила приложены в центре пластины. В задачах с 6 по 11 исследуется влияние положения массы и возмущающей силы на прогибы пластины. Внешняя нагрузка поочередно прикладывается в точках 1, 2, ..., 6. Пластина закреплена по двум противоположным сторонам, а две другие свободны. Расчеты показывают, что прогиб достигает наибольшего значения в момент приложения внешней нагрузки на свободном крае пластины в точке 6. Именно в этой точке наблюдается наибольший прогиб. Наименьший прогиб возникает, когда внешняя нагрузка приложена в узле 1 вблизи закремленной кромки. В этом случае наименьший прогиб наблюдается в точке 5.

В задачах 12 и 13 к пластине одновременно прикладываются три массы в различных точках. В первом случае массы приложены по центральному сечению в направлении оси ОХ. Это точки 1, 3, 9. Во втором случае массы приложены по центральному сечению в направлении оси ОУ, в точках 5,3,8. Возмущающая сила в обоих случаях действует в центре пластины в точке 3. При первой схеме загрузки (задача 12) наибольший прогиб наблюдается в точке 3, там, где приложена одна из трех масс и возмущающая динамическая нагрузка. При второй схеме загрузки (задача 13) максимальный прогиб наблюдается на свободном крае пластины, в точке 6. Прогиб в этом случае вдвое больше, чем в предыдущей задаче. Следует отметить, что свободный край всегда является наиболее опасным граничным условием с позиции максимальных изгибных деформаций и напряжений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Киселева И.В. Колебания опертой по контуру прямоугольной ортотропной пластинки с учетом сосредоточенной массы в месте приложения вибрационной нагрузки. - М.: МАДИ, 1957, вып . 21.
2. Laura P.A., Duran R. A note on forced vibrations of a clamped rectangular plate. // J. of Sound and Vibr., 1975, 42, № 1, - с. 129-135.
3. Ельмуратов С.К., Ельмуратова А.Ф. Расчет ортотропных пластин на вынужденные колебания. В журнале "Наука и техника Казахстана". - Павлодар, ПГУ, 2002.- № 4.
4. Варвак П.М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. - Киев: АН УССР, 1949, ч.1, 1959. - ч.2.