



УДК 539.3/.6:519.863

**Б.М. Абдеев, С.Р. Байгереев, Т.Ф. Брим**  
ВКГТУ, г. Усть-Каменогорск

**ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЙ КРОНШТЕЙН НАИМЕНЬШЕГО  
ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ОБЪЁМА**

Научно-технический прогресс и глобальная компьютеризация, рост скоростей, влияние температуры, магнитных и других полей на прочность, надёжность и экономичность конструкций вызвали интенсивное развитие методов оптимизации и математического программирования. Этому современному научному направлению, лежащему на стыке механики деформируемого твёрдого тела и теории оптимального управления, посвящено множество публикаций [1-4].

Экстремальные задачи строительной механики по снижению расхода материала при создании различных агрегатов, деталей и механизмов, в частности поддерживающих устройств в виде кронштейнов, следует решать уже на стадии физико-математического моделирования, когда возможно всестороннее исследование конструкции и должен быть осуществлён выбор её управляемых переменных  $x_1, x_2, \dots$ , наилучшим образом соответствующих предъявляемым требованиям [1, 2].

В данной статье рассматривается, широко распространённая в строительстве и машиностроении, плоская статически определимая стержневая система (рис. 1), предназначенная для восприятия сосредоточенной нагрузки  $P$ , направленной параллельно оси  $Y$ , при заданном расстоянии  $l$  между шарнирным узлом  $A$  и жёсткой плоскостью (стеной). Допускаемые нормальные напряжения  $[\sigma_p]$  и  $[\sigma_c]$  находятся в соотношении  $[\sigma_c] = \varphi [\sigma_p]$ , предполагающем возможность недопущения потери устойчивости сжатым элементом  $AB$  при соответствующем коэффициенте продольного изгиба  $\varphi$  ( $0 < \varphi \leq 1$ ) [3].

Материал конструкции – однородный, сплошной, изотропный, а искомые площади  $F_1$  и  $F_2$  сечений постоянны по линейным размерам  $l_1$  и  $l_2$  стержней  $AC$  и  $AB$ .

Форма поперечного профиля растянутого элемента  $AC$  является произвольной, а у сжатого ( $AB$ ) – круглое очертание диаметром  $d$  или квадратное с размером стороны  $b$ .

Требуется подобрать такие оптимальные геометрические параметры  $F_{O1} = x_{O1}$ ,  $F_{O2} = x_{O2}$ ,  $\alpha_{O1} = x_{O3}$ ,  $\alpha_{O2} = x_{O4}$  переменных  $x_1 = F_1 > 0$ ,  $x_2 = F_2 > 0$ ,  $x_3 = \alpha_1$  ( $0 \leq \alpha_1 < 90^\circ$ ),  $x_4 = \alpha_2$  ( $0 \leq \alpha_2 < 90^\circ$ ), чтобы общий объём материала кронштейна (рис. 1)

$$V = V(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 l_1 + x_2 l_2 = l \left( \frac{x_1}{\cos x_3} + \frac{x_2}{\cos x_4} \right) \quad (1)$$

был минимальным, то есть  $V_{\min} = V(x_{O1}, x_{O2}, x_{O3}, x_{O4})$  при одновременном соблюдении:

- условий прочности и устойчивости в форме равенств

$$\frac{|N_1|}{x_1} = [\sigma_p], \quad \frac{|N_2|}{x_2} = \varphi [\sigma_p], \quad (2)$$

где  $N_1, N_2$  - внутренние усилия в стержнях (рис. 1)

$$N_1 = \frac{P \cos x_4}{\sin(x_3 + x_4)}, \quad N_2 = \frac{-P \cos x_3}{\sin(x_3 + x_4)}, \quad (3)$$

определяемые из уравнений равновесия  $\sum X = 0, \sum Y = 0$  узла A;

- линейного функционального соотношения

$$\Phi(x_3, x_4) = 0 \quad (4)$$

между углами  $\alpha_1 = x_3, \alpha_2 = x_4$ , конкретный вид которого регламентируется конструктивно-технологическими требованиями к моделируемому двухстержневому кронштейну.

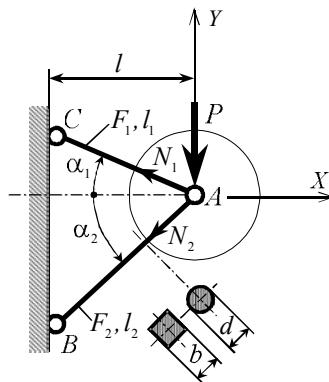


Рисунок 1

Аналитические зависимости (2)-(4) позволяют упростить решаемую классическую задачу прикладной механики и высшей математики на вычисление относительного экстремума  $V(x_{O1}, x_{O2}, x_{O3}, x_{O4})$  [2, 4] путём преобразования формулы (1) в одномерные целевые функции  $V = V(x_3)$  или  $V = V(x_4)$  со стационарными параметрами  $x_{O3}$  или  $x_{O4}$ , адекватными абсолютным минимумам  $V_{\min} = V(x_{O3}), V_{\min} = V(x_{O4})$ , определяемым из условий  $V'_{x_3} = V'_{x_3}(x_{O3}) = 0, V''_{x_3}(x_{O3}) > 0$  или  $V'_{x_4} = V'_{x_4}(x_{O4}) = 0, V''_{x_4}(x_{O4}) > 0$ , в которых численная величина постоянной  $\varphi$  находится методом последовательных приближений [3] по заданным значениям  $[\sigma_p], P, l$  и оптимизированной гибкости

$$\lambda = 1 \cdot l_2 \sqrt{\frac{\kappa}{F_{O2}}} = \frac{l}{\cos x_{O4}} \sqrt{\frac{\kappa}{x_{O2}}}, \quad (5)$$

учитывая, что круглое и квадратное сечения (а также и многие др.) обладают свойством геометрического подобия с коэффициентами  $\kappa$ , соответственно равными [3]:

$$\kappa = \kappa_{\circ} = 4\pi, \kappa = \kappa_{\square} = 12. \quad (6)$$

Разработанная авторами математическая модель проиллюстрирована результатами расчёта  $\varphi < 1, x_{O3}, x_{O4}, x_O, V_{\min}^* = \frac{V_{\min} [\sigma_p]}{pl}$  и коэффициента запаса устойчивости

$$n_y = \frac{\sigma_{kp}}{\varphi[\sigma_p]} \quad (7)$$

( $\sigma_{kp}$  – критическое напряжение [3]) для трёх вариантов  $x_4 = \alpha_2 = 0$ ,  $x_3 = \alpha_1 = 0$ ,  $x_3 = x_4 = x = \alpha$  уравнения связи (4) (рис. 1, 2; табл. 1, 2), а также двух разновидностей формы сечения элемента  $AB$  (рис. 1) при  $P = 200 \text{ кН}$ ,  $l = 100 \text{ см}$ ,  $[\sigma_p] = 16 \text{ кН}/\text{см}^2$ , модуле упругости  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН}/\text{см}^2$ , пределе текучести  $\sigma_T = 24 \text{ кН}/\text{см}^2$  и физико-механических постоянных  $C_1 = 31 \text{ кН}/\text{см}^2$ ,  $C_2 = 0,114 \text{ кН}/\text{см}^2$  формулы Энгессера-Ясинского  $\sigma_{kp} = C_1 - C_2 \lambda$ , в случае  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{np}$  ( $\lambda_0 = 61$ ,  $\lambda_{np} = 100$  – сталь 3 [3]) в сравнении с опубликованными оптимальными решениями, когда  $\varphi = 1$  [4-6].

Количественная информация таблиц 1 и 2 получена с помощью следующих основных формул, которые дополняют функционально-аналитические соотношения (1)-(7) и конкретизируют алгоритмы минимизации теоретического объёма  $V$  конструкции:

- для схемы рис. 2,  $a$ , где  $x_4 = 0$  ( $\lambda = 88,53$  – круглый профиль и  $\lambda = 97,97$  – квадратное сечение, рис. 1):

$$V^* = V^*(x_3) = \frac{1}{\varphi} \left( \frac{\varphi}{\sin x_3 \cos x_3} + \operatorname{ctg} x_3 \right); \quad (8)$$

$$\left[ \frac{dV^*}{dx_3} \right]_{x_3=x_{O3}} = 0, \Rightarrow \cos x_{O3} = \sqrt{\frac{\varphi}{2\varphi+1}}; \quad (9)$$

$$x_{O3} = \arccos \sqrt{\frac{\varphi}{2\varphi+1}}; \quad (10)$$

$$\sigma_{kp} = 31 - 0,114\lambda = \begin{cases} 20,91 \text{ кН}/\text{см}^2 & \text{– круглое сечение,} \\ 19,83 \text{ кН}/\text{см}^2 & \text{– квадратный профиль;} \end{cases} \quad (11)$$

$$V_{\min}^* = V^*(x_{O3}) = 2 \sqrt{\frac{\varphi+1}{\varphi}}; \quad (12)$$

- для модели кронштейна в соответствии с рисунком 2,  $b$  при  $x_3 = 0$  ( $\lambda = 105,54$  – сечение круглое,  $\lambda = 104,58$  – квадратный профиль, рис. 1):

$$V^* = V^*(x_4) = \frac{1}{\varphi} \left( \varphi \operatorname{ctg} x_4 + \frac{1}{\sin x_4 \cos x_4} \right); \quad (13)$$

$$\left[ \frac{dV^*}{dx_4} \right]_{x_4=x_{O4}} = 0, \Rightarrow \cos x_{O4} = \sqrt{\frac{1}{\varphi+2}}; \quad (14)$$

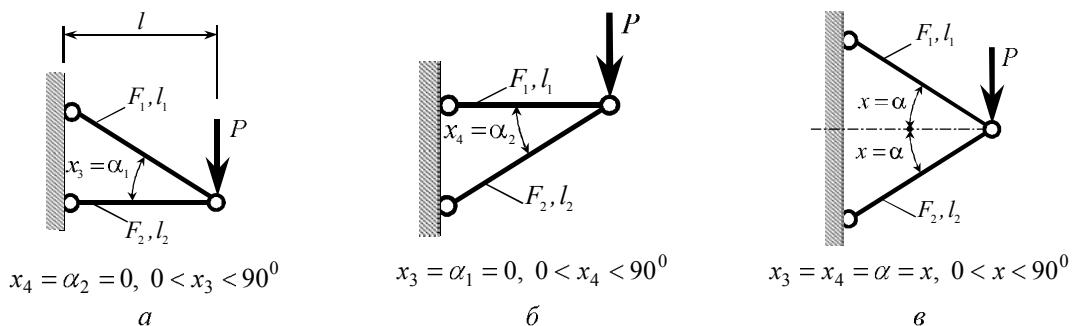
$$x_{O4} = \arccos \sqrt{\frac{1}{\varphi+2}}; \quad (15)$$

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \begin{cases} 17,72 \text{ кН}/\text{см}^2 & \text{– круглое сечение,} \\ 18,02 \text{ кН}/\text{см}^2 & \text{– квадратный профиль;} \end{cases} \quad (16)$$

$$V_{\min}^* = V^*(x_{O4}) = \frac{2}{\varphi} \sqrt{\varphi + 1}; \quad (17)$$

- для варианта с равными углами  $x_3 = x_4 = x$ , изображённого на рисунке 2, в ( $\lambda = 116,33$  - круглый профиль и  $\lambda = 104,24$  - сечение в виде квадрата, рис. 1):

$$V^* = V^*(x) = \frac{\varphi + 1}{\varphi \sin 2x}; \quad (18)$$



## Рисунок 2

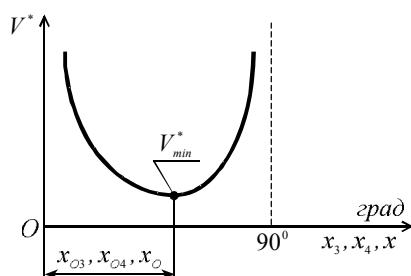
$$\left[ \frac{dV^*}{dx} \right]_{x=x_O} = 0, \Rightarrow \cos x_O = \sin x_O = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad (19)$$

$$x_O = 45^0 = \text{const}; \quad (20)$$

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \begin{cases} 14,59 \text{ кН/см}^2 - \text{круглое сечение,} \\ 18,17 \text{ кН/см}^2 - \text{квадратное сечение; } \end{cases} \quad (21)$$

$$V_{\min}^* = V^*(x_O) = \frac{\varphi+1}{\varphi}. \quad (22)$$

Общий характер графика безразмерного целевого критерия  $V^* = \frac{V[\sigma_p]}{pl}$ , соответствующий выражениям (8), (10), (12), (13), (15), (17), (18), (20), (22), показан на рисунке 3, где при  $x_3, x_4, x = 0$  и  $90^\circ$  объём  $V^* = \infty$ .



### Рисунок 3

Таблица 1

Расчётные данные для круглого сечения стержня АВ (рис. 1)

Частный вид условия (4) (рис. 2)	Оптимальный угол (град)				$V_{min}^*$	$n_y \geq [n_y] = 1,5...5$ [7]				
	Букв. обозн.	$\varphi < 1$	$\varphi = 1$ [4-6]	Погрешность методики [4-6]			$\varphi < 1$	$\varphi = 1$ [4-6]	Погрешность методики [4-6]	$\varphi < 1$
a) $x_4 = 0$	$x_{O3}$	57,33 <sup>0</sup>	54,74 <sup>0</sup>	4,73 %	3,1118; $\varphi = 0,699$	2,828	10,25 %	1,87	1,5	24,67 %
b) $x_3 = 0$	$x_{C4}$	51,28 <sup>0</sup>	54,74 <sup>0</sup>	6,32 %	4,487; $\varphi = 0,556$	2,828	58,66 %	1,99	1,5	32,67 %
c) $x_3 = x_4 = x$	$x_o$	45 <sup>0</sup>	45 <sup>0</sup>	0	3,101; $\varphi = 0,476$	2	55,05 %	1,92	1,5	28,00 %

Таблица 2

Расчётные данные для квадратного профиля подкоса АВ (рис. 1)

Частный вид условия (4) (рис. 2)	Оптимальный угол (град)				$V_{min}^*$	$n_y \geq [n_y] = 1,5...5$ [7]				
	Букв. обозн.	$\varphi < 1$	$\varphi = 1$ [4-6]	Погрешность методики [4-6]			$\varphi < 1$	$\varphi = 1$ [4-6]	Погрешность методики [4-6]	$\varphi < 1$
a) $x_4 = 0$	$x_{O3}$	58,28 <sup>0</sup>	54,74 <sup>0</sup>	6,47 %	3,2236; $\varphi = 0,618$	2,828	14,43 %	2,00	1,5	33,33 %
b) $x_3 = 0$	$x_{O4}$	51,34 <sup>0</sup>	54,74 <sup>0</sup>	6,21 %	4,441; $\varphi = 0,563$	2,828	57,04 %	2,00	1,5	33,33 %
c) $x_3 = x_4 = x$	$x_o$	45 <sup>0</sup>	45 <sup>0</sup>	0	2,766; $\varphi = 0,566$	2	38,30 %	2,00	1,5	33,33 %

Из анализа вышеприведённых расчётно-теоретических данных следует, что минимальный расход материала, в трёх рассмотренных случаях (рис. 2, а, б, в), имеет кронштейн с симметричным расположением стержней (рис. 2, в), квадратным поперечным сечением сжатого элемента  $AB$  и постоянным (не зависящим от  $\varphi$ ) углом  $\alpha_O = x_O = 45^\circ$ . При этом, наличие рёбер жёсткости у модели рисунка 2, в с квадратным профилем стержня  $AB$  обеспечивает наибольший коэффициент  $n_y = 2$  и наименьший объём  $V_{\min}^*$ , а полученные ранее другими авторами [4-6] численные результаты без учёта возможного продольного изгиба подкоса  $AB$  (рис. 1) не идут в запас устойчивости, так как  $n_y = 1,5$  и методика определения этой важнейшей проектно-эксплуатационной характеристики [3, 7], руководствуясь [4-6], даёт погрешность от 24,67 до 33,33 % (табл. 1 и 2). Аналогичный относительный показатель по  $V_{\min}^*$  изменяется в пределах 10,25 ... 58,66 %, и в этой же связи следует констатировать достаточно слабое влияние фактора  $\varphi < 1$  на оптимальные угловые параметры  $x_{O3}$ ,  $x_{O4}$ ,  $x_O$ , не превышающее 6,47 %, в сопоставлении с [4-6] (табл. 1 и 2).

В заключение можно отметить, что введённое в расчётный алгоритм ограничение (4) на переменные  $x_3$ ,  $x_4$ , наряду с учётом понижающей  $[\sigma_p]$  эмпирической константы  $\varphi$  для стержня  $AB$ , является принципиально новым инновационным подходом к решению поставленной задачи [1, 4], позволяющим: 1) повысить несущую способность и надёжность кронштейна за счёт большего коэффициента запаса  $n_y > 1,5$  ( $n_y = 1,5$  при  $\varphi = 1$  [4-6] и  $n_y = 1,87 \div 2$ , если  $\varphi < 1$ ), и возможности более полной реализации прочностных свойств материала путём регулирования гибкости  $\lambda$  сжатого элемента в сторону её уменьшения [7]; 2) существенно расширить возможности вариантов проектирования данной конструкции вследствие увеличения числа варьируемых переменных  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) до четырёх наименований, в отличие от всех известных оптимизационных механико-математических моделей, где  $i \leq 3$  [4-6].

#### Список литературы

1. Фролов К.В. Методы совершенствования машин и современные проблемы машиноведения. – М.: Машиностроение, 1984. – 224 с.
2. Лесин В.В. Основы методов оптимизации / В.В. Лесин, Ю.П. Лисовец. – М.: Изд-во МАИ, 1998. – 344 с.
3. Любошиц М.И. Справочник по сопротивлению материалов / М.И. Любошиц, Г.М. Ицкович. – Минск: Изд-во «Вышэйшая школа», 1969. – 464 с.
4. Абдеев Б.М. Классические оптимизационные задачи в сопротивлении материалов: Учеб. пособие для вузов / Под ред. Ж.О. Кульсейтова. – Усть-Каменогорск: Изд-во ВКГТУ, 2005. – 206 с.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для втузов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
6. Избранные задачи по строительной механике и теории упругости (регулирование, синтез, оптимизация) /Под ред. Н.П. Абовского. – М.: Стройиздат, 1978. – 189 с.
7. Биргер И.А. Расчёт на прочность деталей машин: Справочник / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, Г.Б. Иосилевич. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.

Получено 25.11.2010