ISSN 1561-4212. «ВЕСТНИК ВКГТУ» № 3, 2010.

УДК 539.3

Г.Е. Берикханова
Семипалатинский государственный педагогический институт, г. Семей

МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПРИ НАЛОЖЕНИИ ТОЧЕЧНЫХ СВЯЗЕЙ

Во многих отраслях техники широко применяются оболочечные и пластинчатые конструкции. Поэтому методы математического описания динамических задач с точечными связями имеют большое прикладное значение. В динамических задачах точечные связи существенным образом влияют на все динамические характеристики пластины или оболочки – на спектр собственных частот, формы собственных колебаний, резонансные частоты и амплитуды и т.д., что в последнее время становится все более актуальным.

Рассматривается плоская пластина $\Omega \subset R^2$. Вынужденные поперечные колебания пластины описываются уравнением:

$$D\Delta^2 u(x,y,t) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P(x,y,t); \ (x,y) \in \Omega, t > 0. \tag{1}$$

При этом на внешней границе Ω ставятся граничные условия. К примеру, если внешняя граница задана, то

$$W\big|_{\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по внешней нормали.

Такие колебания хорошо изучены. Наша цель: изучить колебания пластины, когда накладываются точечные связи:

- упругие точечные связи во внутренних точках;
- точечные сосредоточенные массы во внутренних точках;
- точечные опоры из защемления в некотором направлении.

В этом случае уравнение (1) нарушается в тех точках, где накладываются точечные связи. Спрашивается: в таком случае, какие соотношения должны выполняться в этих точках?

Одним из основных результатов исследований является описание колебаний плоской прямоугольной пластины Ω при наложении точечных связей вышеуказанных видов. Мы предъявляем математическую модель колебаний плоской прямоугольной пластины Ω с учетом точечных связей. Заметим, что в этом случае дифференциальное уравнение (1) выполняется не во всех точках Ω. Тем самым уравнение (1) приходится исследовать в многосвязной области, то есть в области Ω, из которой удалены точки, где наложены точечные связи.

Итак, дифференциальное уравнение (1) выполняется в области Ω, из которой удалены отдельные изолированные точки $\Omega \setminus \bigcup_{q=1}^{Q}(x^q, y^q) \bigcup_{l'=1}^{L'}(x^{l'}, y^{l'}) \bigcup_{s=1}^{S}(x^s, y^s)$.

Пусть (x^q, y^q) - означает точку, к которой присоединена сосредоточенная масса M_q. Тогда в этой точке должно выполниться условие

ISSN 1561-4212. «ВЕСТНИК ВКГТУ» № 3, 2010.

$$M_q \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\bigg|_{(x^q, y^q)} - 2D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x^q-0, y^q-0} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x^q-0, y^q+0} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x^q+0, y^q-0} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x^q+0, y^q+0} \right) = 0, \quad (3)$$

причем надо считать, что $W(x,y,t), \dfrac{\partial W(x,y,t)}{\partial x}, \dfrac{\partial W(x,y,t)}{\partial y}$ непрерывны в точке $\left(x^q, y^q, t\right)$.

Пусть $\left(x^{l}, y^{l}\right)$ означает точку, где наложена точечная упругая связь с коэффициентом жесткости C^{l}. Тогда в этой точке должно выполниться условие

$$C^{l} W\left(x^{l}, y^{l}, t\right) - 2D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x^{l}-0, y^{l}-0} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x^{l}-0, y^{l}+0} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x^{l}+0, y^{l}-0} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x^{l}+0, y^{l}+0} \right) = 0 \quad (4)$$

причем считаем, что $W(x,y,t), \dfrac{\partial W(x,y,t)}{\partial x}, \dfrac{\partial W(x,y,t)}{\partial y}$ непрерывны в точке $\left(x^{l}, y^{l}, t\right)$.

Пусть $\left(x^s, y^s\right)$ означает точку, которая жестко закреплена. Тогда в этой точке должны выполняться условия

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x^s-0, y^s-0} - \dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x^s-0, y^s+0} - \dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x^s+0, y^s-0} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x^s+0, y^s+0} \right) = 0, \\ W\left(x^s, y^s\right) = 0 \quad (s = 1, \ldots, S), \end{cases} \quad (5)$$

причем считаем, что $W(x,y,t)$ непрерывна в точке $\left(x^s, y^s, t\right)$.

На внешней границе, по-прежнему, считаем выполненными условия (2).

Кратко остановимся на выводе указанных точечных условий. Они получены на основе вариационного принципа точно так же, как получаются уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала Остроградского-Гамильтона. Только учтено то, что производные функции $W(x,y,t)$ порядка 2 и выше могут иметь разрывы в тех точках, где наложены точечные связи. То есть класс варьируемых функций будет несколько другим, чем в стандартном курсе теории упругости [1].

Следующим по важности результатом исследований является доказательство разрешимости полученных многоточечных задач.

Теперь рассмотрим данную задачу для пластины круглой формы $\Omega = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\right\}$ и считаем, что $W(x,y,t)$ не зависит от времени. Тогда задача примет вид:

$$\Delta^2 W = P(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega - \left\{x_0, y_0\right\} \quad (6)$$

с граничными условиями на внешней границе,

$$W\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \quad (7)$$

причем во внутренней точке $\left(x_0, y_0\right)$ пластина упруго оперта

$$C_0 W(x_0, y_0) - 2D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x_0-0, y_0-0} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x_0-0, y_0+0} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x_0+0, y_0-0} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\bigg|_{x_0+0, y_0+0} \right) = 0, \quad (8)$$

где $P(x,y)$ - внешнее воздействие, C_0 - жесткость точечной упругой опоры.

При этом считаем, что $W(x,y),\dfrac{\partial W(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial W(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в точке (x_0,y_0).

В работе [2] в явном виде выписана функция Грина задачи Дирихле в круге

$$\Delta^2 U = P(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega=\left\{(x,y): x^2+y^2<1\right\}, \tag{9}$$

$$U\big|_{\partial\Omega}=0, \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0, \qquad (x,y)\in\partial\Omega=\left\{(x,y): x^2+y^2=1\right\}. \tag{10}$$

Выпишем её в удобном для применения виде

$$\begin{gathered}
G(x,y,\xi,\mu)=d\left[(x-\xi)^2+(y-\mu)^2\right]\ln\left[(x-\xi)^2+(y-\mu)^2\right]-\\
-d\left(\xi^2+\mu^2\right)\left[\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\mu^2}\right)^2+\left(y-\frac{\mu}{\xi^2+\mu^2}\right)^2\right]\ln\left[\left(\xi^2+\mu^2\right)\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\mu^2}\right)^2+\left(y-\frac{\mu}{\xi^2+\mu^2}\right)^2\right]+\\
+d\left(1+\ln\left[\left(\xi^2+\mu^2\right)\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\mu^2}\right)^2+\left(y-\frac{\mu}{\xi^2+\mu^2}\right)^2\right]\right)\left(1-\xi^2-\mu^2\right)\left(1-x^2-y^2\right),
\end{gathered} \tag{11}$$

где d - некоторое нормировочное число, явный вид которого здесь не столь существенен. Непосредственно проверяется, что функция $U(x,y)=\int\limits_{\Omega} G(x,y,\xi,\mu)P(\xi,\mu)\,d\xi d\mu$ является решением задачи (1)-(3) для любых допустимых $P(x,y)$.

Решение задачи (6)–(8) ищем в виде [3]

$$\begin{gathered}
W(x,y)=U(x,y)-\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(G(x,y,\xi,\mu)\frac{\partial\Delta_{\xi,\mu}h(\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}}-\Delta_{\xi,\mu}h(\xi,\mu)\frac{\partial G(x,y,\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}}\right)+\right.\\
\left.+\left(\Delta_{\xi,\mu}G(x,y,\xi,\mu)\frac{\partial h(\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}}-h(\xi,\mu)\frac{\partial\Delta_{\xi,\mu}G(x,y,\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}}\right)\right]dS+\alpha G(x,y,x_0,y_0)+\\
+\beta\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}+\gamma\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\mu}+\theta\frac{\partial^2 G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi\partial\mu}
\end{gathered} \tag{12}$$

где $h(\xi,\mu)$ - произвольная достаточно гладкая функция,

$\Delta_{\xi,\mu}$ - оператор Лапласа по переменным (ξ,μ),

$n_{\xi,\mu}$ - внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке (ξ,μ),

$\alpha,\beta,\gamma,\theta$ - некоторые числа.

Поскольку функция $G(x,y,\xi,\mu)$ выписана в явном виде (11), то значения $\dfrac{\partial G}{\partial n_{\xi,\mu}}$, $\Delta_{\xi,\mu}G$, $\dfrac{\partial}{\partial n_{\xi,\mu}}\Delta_{\xi,\mu}G$ считаем известными. Задача состоит в выборе функции $h(\xi,\mu)$ и чисел $\alpha,\beta,\gamma,\theta$ из условия, чтобы выполнялись соотношения (6)-(8).

ISSN 1561-4212. «ВЕСТНИК ВКГТУ» № 3, 2010.

Известно, что при любом гладком $h(\xi,\mu)$ выражение

$$V(x,y)=\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(G(x,y,\xi,\mu)\frac{\partial\Delta_{\xi,\mu}h(\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}}-\Delta_{\xi,\mu}h(\xi,\mu)\frac{\partial G(x,y,\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\Delta_{\xi,\mu}G(x,y,\xi,\mu)\frac{\partial h(\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}}-h(\xi,\mu)\frac{\partial\Delta_{\xi,\mu}G(x,y,\xi,\mu)}{\partial n_{\xi,\mu}}\right)\right]dS$$

является решением однородного уравнения

$$\Delta^2V=0,\quad (x,y)\in\Omega.$$

Поэтому очевидно, что $W(x,y)$ является решением неоднородного уравнения (6). Остается выбрать функцию $h(\xi,\mu)$ и числа $\alpha,\beta,\gamma,\theta$ так, чтобы правая часть (12) удовлетворяла краевым условиям (7), (8).

Непосредственной проверкой убеждаемся [4] в справедливости равенств

$$G(x,y,\xi,\mu)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0,\qquad \Delta_{\xi,\mu}G(x,y,\xi,\mu)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n_{\xi,\mu}}G(x,y,\xi,\mu)\Bigg|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial n_{\xi,\mu}}\Delta_{\xi,\mu}G(x,y,\xi,\mu)\Bigg|_{(x,y)\in\partial\Omega}=-\delta(x-\xi,y-\mu),$$

при любых $(\xi,\mu)\in\partial\Omega$.

Отсюда сразу же следует

$$V(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=-h(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}.\tag{13}$$

Точно так же из равенств

$$\frac{\partial}{\partial n_{x,y}}G(x,y,\xi,\mu)\Bigg|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0,\qquad \frac{\partial^2}{\partial n_{x,y}\partial n_{\xi,\mu}}G(x,y,\xi,\mu)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n_{x,y}}\Delta_{\xi,\mu}G(x,y,\xi,\mu)\Bigg|_{(x,y)\in\partial\Omega}=\delta(x-\xi,y-\mu),\qquad \frac{\partial^2}{\partial n_{x,y}\partial n_{\xi,\mu}}\Delta_{\xi,\mu}G(x,y,\xi,\mu)\Bigg|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0$$

Из $(\xi,\mu)\in\partial\Omega$ следует граничное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial n_{x,y}}V(x,y)\Bigg|_{(x,y)\in\partial\Omega}=\frac{\partial}{\partial n_{x,y}}h(x,y)\Bigg|_{(x,y)\in\partial\Omega}.\tag{14}$$

Из равенств (13) и (14) вытекает, что $h(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0$ и $\frac{\partial}{\partial n_{x,y}}h(x,y)\Bigg|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0$.

Поскольку $G(x,y,t,\tau)$ по переменным (t,τ) удовлетворяет условиям (7), то $V(x,y)=0$ для всех $(x,y)\in\Omega\setminus\{x_0,y_0\}$.

Надо выбрать постоянные $\alpha,\beta,\gamma,\theta$ так, чтобы удовлетворялось точечное условие (8) и непрерывность в $W(x, y), \frac{\partial W(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial W(x, y)}{\partial y}$ в точке (x_0, y_0). Это всегда возможно. Таким образом, задача (6)-(8) имеет решение, причем предложен конкретный алгоритм его построения.

Список литературы

1. Берикханова, Г.Е. Применение потенциалов нулевого радиуса // Поиск. - 2009. - № 4. - С. 167-178.
2. Кальменов Т.Ш. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре / Т.Ш. Кальменов, Б.Д. Кошанов, М.Ю. Немченко // Докл. РАН. - 2008. - Т. 421. - № 3. - С. 305-307.
3. Павлов Б.С. Теория расширений и потенциалы нулевого радиуса с внутренней структурой / Б.С. Павлов, А.А. Шушков // Математический сб. - 1988. - Т. 137 (179). - № 2. - С. 147-183.
4. Берикханова Б.Е. Резольвенты конечномерных возмущенных корректных задач для бигармонического оператора / Б.Е. Берикханова, Б.Е. Кангужин // Уфимский математический журнал. - 2010. - № 1. - Т. 2. - С. 17-34.

Получено 9.07.10

КUТТЫКТАЙМЫЗ!
ПОЗДРАВЛЯЕМ!

60 *жас*
лет

БАКИРОВА
ЖЕТПИСБАЯ БАКИРОВИЧА,
доктора технических наук, профессора
кафедры технологических машин
и оборудования

ЗДОРОВЬЯ, СЧАСТЬЯ, УСПЕХОВ, ДОРОГОЙ ЮБИЛЯР!

•

МЕРЕЙТОЙ ИЕСІНЕ МЫКТЫ ДЕНСАУЛЫК, ТАУСЫЛМАС БАКЫТ, ТВОРЧЕСТВОЛЫК ТАБЫС ТІЛЕЙМІЗ!