УДК 519.62:624.131

Б. Рысбайулы
КБТУ, г. Алматы
А.Т. Байманкулов
КГУ им. А. Байтурсынова, г. Костанай

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВЛАГОПРОВОДНОСТИ ПОЧВЫ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

Постановка задачи. Движение воды в капиллярно-пористых средах, к каковым относятся почвы, может происходить под воздействием самых разнообразных движущих сил, представляющих градиент: давления, потенциала гравитационного поля, потенциала электрического поля, температуры, концентрации растворенных веществ [1-4], [5]. Проведя классификацию механизмов движения воды в дисперсных средах, С.В. Нерпин предполагает, помимо движущихся сил, различать силы по месту их действия в потоке, когда они распределены внутри объема потока, или вызваны поверхностными силами на границе «жидкость-воздух», или обусловлены силами, возникающими вблизи границы жидкости с твердой стенкой. В итоге он заключил, что почвенная влага движется под действием объемных сил, поверхностные и граничные эффекты здесь не играют роли. Поэтому, принимая это обстоятельство во внимание и решая относительно простую задачу, предполагающую:

– отсутствие электрического поля;

– постоянство концентрации рассмотренных веществ;

– движение влаги и температуры в области $Q=(0,H)\cdot(0,T)$ можно описать уравнением [6]:

$$\gamma_0 c\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right), \tag{1}$$

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H}+\overline{\alpha}\big(\theta-T_b(t)\big)\Big|_{z=H}=0,\ \ \theta\big|_{z=0}=T_1,\ \ \theta\big|_{t=0}=\theta_0(z), \tag{2}$$

где $\overline{\alpha}=\alpha+\alpha_0 D_n(H)$.

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K(z)+D\frac{\partial W}{\partial z}+D\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right), \tag{3}$$

$$\sigma\big|_{z=H}=A(t)\ ,\ \ \sigma\big|_{z=0}=0\ ,\ \ W\big|_{t=0}=W_0(z), \tag{4}$$

здесь $\sigma(z,t)=K(z)+D(z)\dfrac{\partial W}{\partial z}+D(z)\mu\dfrac{\partial\theta}{\partial z}$.

Используя изменение температуры грунта и влаги на поверхности земли $T_g(t)$, $W_g(t)$ требуется определить коэффициент диффузии $D(z)$. Методы решения обратных задач досконально изучены в работах [6-9], а в работах [10-14] изучены различные обратные задачи переноса тепла и влаги.

Итерационный метод. Задается начальное значение коэффициента диффузии $D_n(z)$. Соответствующее решение системы (1)-(4) обозначим через $\left(\overset{n}{\theta}(z,t),\ \overset{n}{W}(z,t)\right)$. Следующее приближение коэффициента диффузии обозначим через $D_{n+1}(z)$, а соответствующее решение системы (1)-(4) будет $\left(\overset{n+1}{\theta}(z,t),\ \overset{n+1}{W}(z,t)\right)$. Тогда для разности

$$\delta\theta(z,t)=\overset{n+1}{\theta}(z,t)-\overset{n}{\theta}(z,t),\ \delta W=\overset{n+1}{W}-\overset{n}{W},\ \delta D=D_{n+1}-D_n$$

получается задача

$$\gamma_0 c\frac{\partial\delta\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right), \tag{5}$$

$$\lambda\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H}+\overline{\alpha}\delta\theta\bigg|_{z=H}+\alpha_0\delta\theta\left(\overset{n+1}{\theta}-T_в\right)=0,\ \delta\theta\bigg|_{z=0}=0,\ \delta\theta\bigg|_{t=0}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\delta W}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D_n\frac{\partial\delta W}{\partial z}+D_n\mu\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}+\delta D\frac{\partial\overset{n+1}{W}}{\partial z}+\mu\delta D\frac{\partial\overset{n+1}{\theta}}{\partial z}\right), \tag{7}$$

$$\delta\sigma\bigg|_{z=H}=0,\ \delta\sigma\bigg|_{z=0}=0,\ \delta W\bigg|_{t=0}, \tag{8}$$

где
$$\delta\sigma=D_n\frac{\partial\delta W}{\partial z}+D_n\mu\frac{\partial\delta W}{\partial z}+\delta D\frac{\partial\overset{n+1}{W}}{\partial z}+\mu\delta D\frac{\partial\overset{n+1}{\theta}}{\partial z}.$$

Умножим (5) на $\psi(z,t)$ и проинтегрируем по области Q. Тогда

$$\int_0^H\gamma_0 c\int_0^T\frac{\partial\delta\theta}{\partial t}\psi dtdz=\int_0^T dt\int_0^H\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right)\psi dz.$$

Интегрируя по частям, выводим, что

$$\int_0^H\gamma_0 c\delta\theta\psi\bigg|_{t=0}^{t=T}dz-\int_0^H\int_0^T\gamma_0 c\delta\theta\frac{\partial\psi}{\partial t}dtdz=\int_0^T\lambda\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\psi\bigg|_{z=0}^{z=H}dt-\int_0^T\int_0^H\lambda\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}dzdt.$$

Пусть $\psi(z,T)=0,\ \psi(0,t)$. Используя (6), выводим равенство

$$-\int_0^H\int_0^T\delta\theta\gamma_0 c\frac{\partial\psi}{\partial t}dtdz=-\overline{\alpha}\int_0^T(\delta\theta\psi)\bigg|_{z=H}dt-\alpha_0\int_0^T\delta D\left(\overset{n+1}{\theta}-T_в\right)\psi\bigg|_{z=H}d\tau-\int_0^T\int_0^H\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}dzdt.$$

Применим еще раз формулу интегрирования по частям

$$-\int_0^H\int_0^T\delta\theta\gamma_0 C\frac{\partial\psi}{\partial t}dtdz+\overline{\alpha}\int_0^T(\delta\theta\psi)\bigg|_{z=H}dt=-\alpha_0\int_0^T\delta D\left(\overset{n+1}{\theta}-T_в\right)\psi\bigg|_{z=H}d\tau-$$
$$-\int_0^T\delta\theta\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}\bigg|_{z=0}^{z=H}dt+\int_0^H\int_0^T\delta\theta\left(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dzdt.$$

Используя однородное условие $\delta\theta|_{z=0}=0$ и группируя подобные величины, имеем равенство

$$-\int_0^H\int_0^T\delta\theta\left(\gamma_0 C\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)dzdt+\int_0^T\delta\theta\left(\alpha\psi+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\bigg|_{z=H}dt=-\alpha_0\int_0^T\delta D\left(\overset{n+1}{\theta}-T_в\right)\psi\bigg|_{z=H}d\tau. \tag{9}$$

Умножим (7) на произвольную функцию $U(z,t)$, интегрируем по области Q. Тогда

$$\int_0^H dz \int_0^T \frac{\partial \delta W}{\partial t} u dt = \int_0^T dt \int_0^H \frac{\partial \delta \sigma}{\partial z} u dz.$$

Интегрируя по частям по z и t, имеем

$$\int_0^H dz \delta W u \Big|_{t=0}^{t=T} dz - \int_0^H dz \int_0^T \delta W \frac{\partial u}{\partial t} dt = \int_0^T dt \delta \sigma u \Big|_{z=0}^{z=H} dt - \int_0^T \int_0^H \delta \sigma \frac{\partial u}{\partial z} dz dt.$$

Полагая $u(z,T)$ и учитывая начально-граничные условия (8), выводим

$$-\int_0^T \int_0^H \delta W \frac{\partial u}{\partial t} dt dz = -\int_0^T \int_0^H \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta W + \mu \delta \theta\right) D_n(z) \frac{\partial u}{\partial z} dz dt -$$

$$-\int_0^T \int_0^H \delta D \frac{\partial \overset{n+1}{W}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} dt dz - \int_0^T \int_0^H \delta D \mu \frac{\partial \overset{n+1}{\theta}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} dt dz.$$

Еще раз применяя формулу интегрирования по частям по переменной z, имеем

$$-\int_0^H \int_0^T \delta W \frac{\partial u}{\partial t} dt dz = -\int_0^T \left(\delta W + \mu \delta \theta\right) D_n(z) \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0}^{z=H} dt + \int_0^T \int_0^H \left(\delta W + \mu \delta \theta\right) \frac{\partial}{\partial z}\left(D_n(z) \frac{\partial u}{\partial z}\right) dz dt -$$

$$-\int_0^T \int_0^H \delta D \frac{\partial \overset{n+1}{W}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} dt dz - \int_0^T \int_0^H \mu \delta D \frac{\partial \overset{n+1}{\theta}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} dt dz.$$

Полагая $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0,$ и собирая подобные величины, получаем равенство

$$-\int_0^H \int_0^T \delta W \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_n(z) \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) dz dt - \int_0^H \int_0^T \delta \theta \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu D_n(z) \frac{\partial u}{\partial z}\right) dz dt + \int_0^T \left(\delta \theta \mu D_n(z) \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=H} dt +$$

$$+ \int_0^T \left(\delta W D_n(z) \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=H} dt = -\int_0^T \int_0^H \delta D \frac{\partial \overset{n+1}{W}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} dt dz - \int_0^T \int_0^H \delta D \mu \frac{\partial \overset{n+1}{\theta}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} dt dz.$$

Складывая последнее равенство с соотношением (9), получим

$$-\int_0^H \int_0^T \delta \theta \left(\gamma_0 c \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu D_n(z) \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) dz dt - \int_0^H \int_0^T \delta W \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_n(z) \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) dz dt +$$

$$+ \int_0^T \delta \theta \left(\alpha \psi + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu D_n(z) \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=H} dt + \int_0^T \delta W D_n(z) \frac{\partial u}{\partial z}\Bigg|_{z=H} dt = -\int_0^T \int_0^H \delta D \frac{\partial \overset{n+1}{W}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} dt dz -$$

$$-\int_0^T \int_0^H \delta D \mu \frac{\partial \overset{n+1}{\theta}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} dz dt - \alpha_0 \int_0^T \delta D \left(\overset{n+1}{\theta} - T_в \right) \psi \Bigg|_{z=H} d\tau.$$

Предполагаем, что имеют место равенства

$$\gamma_0 c \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu D_n(z) \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 , \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_n(z) \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\left(\alpha \psi + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu D_n(z) \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=H} = 2\left(\theta(H,t) - T_g(t)\right),$$

$$D_n(z)\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=H} = 2A_0\big(W(H,t) - W_g(t)\big).$$

Тогда справедливо соотношение

$$\begin{gathered}2\int_0^T \delta\theta\big(\theta(H,t) - T_g(t)\big)\Big|_{z=H} dt + 2A_0\int_0^T \delta W\big(W(z,t) - W_g(t)\big)\Big|_{z=H} dt = \\ = -\int_0^T\int_0^H \delta D\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial \overset{n+1}{W}}{\partial z} + \mu\frac{\partial \overset{n+1}{\theta}}{\partial z}\right)dzdt - \alpha_0\int_0^T \delta D\left(\overset{n+1}{\theta} - T_в\right)\psi\Big|_{z=H} d\tau.\end{gathered} \tag{10}$$

Следующее значение коэффициента диффузии находится из минимизаций функционала

$$J(D) = \int_0^T \big(\theta(H,t) - T_g(t)\big)^2 dt + A_0\int_0^T \big(W(H,t) - W_g(t)\big)^2 dt.$$

В этом случае

$$\begin{gathered}J(D_{n+1}) - J(D_n) = 2\int_0^T \delta\theta\big(\theta(H,t) - T_g(t)\big)dt + 2A_0\int_0^T \delta W\big(W(H,t) - W_g(t)\big)dt + \\ + \int_0^T (\delta\theta)^2\Big|_{z=H} dt + A_0\int_0^T (\delta W)^2\Big|_{z=H} dt.\end{gathered}$$

Учитывая (10), перепишем его в виде

$$\begin{gathered}J(D_{n+1}) - J(D_n) = -\int_0^T\int_0^H \delta D\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial \overset{n}{W}}{\partial z} + \mu\frac{\partial \overset{n}{\theta}}{\partial z}\right)dzdt - \int_0^T\int_0^H \delta D\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial \delta W}{\partial z} + \mu\frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\right)dzdt + \\ + A_0\int_0^T (\delta W)^2\Big|_{z=H} dt - \alpha_0\int_0^T \delta D\left(\theta - T_b\right)\psi\Big|_{z=H} d\tau - \alpha_0\int_0^T \delta D\delta\theta\psi\Big|_{z=H} d\tau.\end{gathered}$$

Интуитивно ясно, что знак $J(D_{n+1}) - J(D_n)$ определяется первым интегралом, стоящим в правой части знака равенства. Поэтому предполагаем, что

$$\delta D = \beta_n(z)\int_0^T \frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z} + \mu\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)dt + \beta_n(z)\alpha_0\int_0^T (\theta - T_в)\psi\Big|_{z=H} d\tau, \tag{11}$$

тогда

$$\begin{gathered}J(D_{n+1}) - J(D_n) = -\int_0^H \beta_n(z)\left(\int_0^T \frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z} + \mu\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)dt\right)^2 dz - \\ -\int_0^T\int_0^H \delta D\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial \delta W}{\partial z} + \mu\frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\right)dzdt + \int_0^T (\delta\theta)^2\Big|_{z=H} dt + A_0\int_0^T (\delta W)^2\Big|_{z=H} dt - \int_0^T \alpha_0\delta D\delta\theta\psi\Big|_{z=H} dt.\end{gathered} \tag{12}$$

В ходе вывода формул (11) и (12) нами получены задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_n(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0, \tag{13}$$

$$D_n(z)\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=H} = 2A_0\big(W(H,t) - W_g(t)\big),\ \ \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0,\ \ u(z,T) = 0, \tag{14}$$

$$\gamma_0 C\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu D_n(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0, \tag{15}$$

$$\left(\alpha\psi + \lambda\frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu D_n(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\bigg|_{z=H} = 2\big(\theta(H,t) - T_g(t)\big), \tag{16}$$

$$\psi(0,t) = 0,\ \ \psi(z,T) = 0. \tag{17}$$

Структурная схема решения поставленной задачи:

1. Задается начальное приближение $D_n(z)$.
2. Решается задача (1), (2) и определяются $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ и $\theta(H,t)$.
3. Решается задача (3), (4) и определяется $\frac{\partial W}{\partial z}$ и $W(H,t)$.
4. Решается первая сопряженная задача (13), (14) и определяется $\frac{\partial u}{\partial z}$.
5. Решается вторая сопряженная задача (15)-(17) и определяется $\frac{\partial \psi}{\partial z}$.
6. Из формулы (11) вычисляется $D_{n+1}(z)$.
7. Вычисляются функционалы $J(D_{n+1}),\ J(D_n)$.
8. Если

$$\left|\frac{J(D_{n+1}) - J(D_n)}{J(D_n)}\right| < \varepsilon,$$

то за истинное значение коэффициента $D(z)$ берется вычисленное $D_{n+1}(z)$.

Список литературы

1. Buckingham E. Studies on movement of soil moisture. U.S. Dep. Agric. Bur. of Soils. (Washington), 1907, Bull. 38.
2. Richards L.A. Capillary conduction of liquids through medians. – Physics, 1931, vol, 1, p.318-333.
3. Childs E.D. The transport of water through heavy clay soils. I, III. – j.Ag. Sci., 1936, vol. 26.
4. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. - 664 с.
5. Нерпин С.В. О расчете нестационарного движения влаги в почве / С.В. Нерпин, Г.И. Юзефович: Докл. ВАСХНИЛ. - №6. - 1966.
6. Мартынов Г.А. Тепло- и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокрилогии (мерзлотоведения) / Под. ред. Н.А. Цытович. – М., 1959. - Гл. VI. - С. 153-192.
7. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. - 280 с.
8. Кабанихин С.И. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы / С.И. Кабанихин, М.А. Бектемисов, А.Т. Нурсейтова. – Алматы; Новосибирск, 2006. - 426 с.
9. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. - Новосибирск, 2009. - 457 с.
10. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений / С.И. Кабанихин, К.Т. Искаков. - Алматы, 2007. - 331 с.
11. Рысбайулы Б. Идентификация коэффициента теплопроводности распространения тепла в неоднородной среде // Вестник КБТУ. - 2008. - №1. - С. 62-65.
12. Рысбайулы Б. Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде / Б. Рысбайулы, А.Т. Байманкулов, Г.И. Махамбетова // Вестник НАН РК. - 2008. - №1. - С. 11-13.
13. Рысбайулы Б. Разностный метод определение коэффициента теплопроводности грунта в

процессе промерзаний / Б. Рысбайулы, А.Т. Байманкулов, А.О. Исмаилов // Вестник НАН РК. - 2008. - №2. - С. 7-9.
14. Байманкулов А.Т. Определение коэффициента диффузии почвенной воды в однородной среде // Вестник НАН РК. - 2008. - №2. - С. 7-9.

Получено 13.04.10

УДК 519.62:624.131

Б. Рысбайулы
КБТУ, г. Алматы
З.Б. Биртаева
КГУ им. А. Байтурсынова, г. Костанай

ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МНОГОСЛОЙНОГО ГРУНТА С УЧЕТОМ КОНВЕКЦИИ ВЛАГИ

Постановка задачи. Конвективный перенос тепла в грунте осуществляется водой или воздухом. Передвижение влаги в грунте может осуществляться либо в результате фильтрации (т.е. под воздействием гравитационных сил), либо в результате миграции (т.е. под воздействием «внутренних» сил, возникающих в самом грунте на поверхностях раздела вода-минеральный скелет), либо тем и другим путем одновременно. Г.А. Мартынов, А.М. Глобус [1,2] и другие ученые доказали, что механизм движения в обоих случаях совершенно одинаков, хотя силы, вызывающие его, различны. В работах [3-5] изучены математические свойства разностных схем для однородного грунта, а в работах [6, 7] изучен метод определения коэффициента теплопроводности однородного грунта с учетом конвекций влаги. В работах [8-10] изложены современные состояния теории обратных и некорректных задач. В области $Q=(0,H)\cdot(0,T)$ рассматривается конвективное распространение тепла. Уравнение движения тепла записывается в следующем виде:

$$\gamma_0 c\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right). \tag{1}$$

Для уравнения (1) ставятся следующие начально-граничные условия:

$$\theta\big|_{z=0}=T_1,\quad \lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H}=-\alpha\left(\theta\big|_{z=H}-T_b(t)\right),\ \ \omega\big|_{t=0}=\omega_0(z). \tag{2}$$

Уравнение движения влаги записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right). \tag{3}$$

Уравнение влаги (2) решается при следующих условиях:

$$\omega\big|_{z=0}=\omega_1,\quad \frac{\partial\omega}{\partial z}\bigg|_{z=H}=A(t),\ \ \omega\big|_{t=0}=\omega_0(z). \tag{4}$$

Кроме того, при переходе от одного слоя к другому ставятся условия

$$\left[\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]_{z=h_k}=0,\quad \left[D\frac{\partial\omega}{\partial z}+D\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]_{z=h_k}=0\ \ [\theta]_{z=h_k}=0,\quad [\omega]_{z=h_k}=0,\quad k=1,2,\ldots \tag{5}$$

Здесь $z=h_k,\,k=1,2,\ldots$ координаты точки перехода. Для того чтобы определить коэффициент теплопроводности задаются условия