

Таким образом, оптимальное решение увеличилось на  
 $186,7 - 160 = 26,7$  тыс. тенге.

Данная задача легко алгоритмируется. Для реализации данного метода разработана информационная система в среде MS Access, что позволяет широко распространить данный метод для использования на любых предприятиях, имеющих производство.

Предложенный подход показывает возможность увеличения доходов предприятия за счет реализации излишков ресурсов для приобретения недостающих.

Список литературы

1. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие / В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш. - М.: ЮНИТИ, 1999.
2. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. - М.: ЮНИТИ, 2000.
3. Экономико-математические методы и модели. Учеб. пособие / Под ред. А.В. Кузнецова. - 2-е изд. - Минск, 2000.
4. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. Фис. - М., 2001.

Получено 22.04.10

УДК 531: 622.233: 622.235

**М.Н. Калимолдаев, Г.А. Айдосов, С.Н. Тойбаев**

Институт проблем информатики и управления МОН РК, г. Алматы

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИНТЕНСИВНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ  
 В НЕЛИНЕЙНО-СЖИМАЕМОЙ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДАХ**

Рассматривается задача о распространении интенсивной сферической взрывной волны в грунте под действием приложенной к границе каверны с первоначальным радиусом  $r_0$  монотонно убывающей нагрузки  $\sigma_0(t)$  высокой интенсивности, которая возникает в ближней зоне взрыва вследствие газо- и термодинамических процессов. Грунт при уровне напряжений в несколько килобар моделируется либо «пластическим газом» [1], либо упругопластической средой с жесткой характеристикой разгрузки с учетом необратимых процессов и конечных деформаций. При изучении конечных упругопластических деформаций грунта, в отличие от [1-8], используется деформационная теория [9] с обобщенными определяющими функциями  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ ,  $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon, \varepsilon_i)$ , где  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma_i$  – первые и вторые инварианты тензоров деформаций и напряжений. Причем необратимый процесс разгрузки среды по интенсивности напряжений,  $\sigma_i$  согласно [10], принимается зависящим только от  $\varepsilon_i$  по линейному закону с модулем Юнга  $E_i$ . Кроме того, рассмотрен случай, когда  $\sigma_i = \sigma_i(\sigma)$ .

Функции  $\sigma(\varepsilon)$  и  $\sigma_i(\varepsilon, \varepsilon_i)$  в процессе нагружения среды представляются в виде [10]

$$\sigma(\varepsilon) = (\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon) \varepsilon, \quad \sigma_i(\varepsilon, \varepsilon_i) = \sigma_i^H(\varepsilon_i) - \frac{(\sigma(\varepsilon) + 25)}{15} [\sigma_i^b(\varepsilon_i) - \sigma_i^H(\varepsilon_i)] \quad (1)$$

при  $\varepsilon < 0$ ,

$$\sigma(\varepsilon) = (\alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon) \varepsilon, \quad \sigma_i(\varepsilon, \varepsilon_i) = \sigma_i^H(\varepsilon_i) + \frac{(\sigma(\varepsilon) + 25)}{15} [\sigma_i^b(\varepsilon_i) - \sigma_i^H(\varepsilon_i)] \quad (2)$$

при  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sigma_i^b(\varepsilon_i) = \frac{(\varepsilon_i - 0,03)}{0,02} \cdot \frac{(\varepsilon_i - 0,04)}{0,03} \cdot 20,04 - \frac{(\varepsilon_i - 0,01)}{0,02} \cdot \frac{(\varepsilon_i - 0,04)}{0,01} \cdot 27,18 + \frac{(\varepsilon_i - 0,01)}{0,03} \cdot \frac{(\varepsilon_i - 0,03)}{0,01} \cdot 28,54, \quad (3)$$

$$\sigma_i^H(\varepsilon_i) = \frac{(\varepsilon_i - 0,03)}{0,02} \cdot \frac{(\varepsilon_i - 0,04)}{0,03} \cdot 12,84 - \frac{(\varepsilon_i - 0,01)}{0,02} \cdot \frac{(\varepsilon_i - 0,04)}{0,01} \cdot 17,23 + \frac{(\varepsilon_i - 0,01)}{0,03} \cdot \frac{(\varepsilon_i - 0,03)}{0,01} \cdot 18,84$$

при  $0,01 \leq \varepsilon_i \leq 0,03$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_i^b(\varepsilon_i) &= 27,69 + 170,2108(\varepsilon_i - 0,033), \\ \sigma_i^H(\varepsilon_i) &= 17,7 + 170,2108(\varepsilon_i - 0,033) \end{aligned} \quad (4)$$

при  $\varepsilon_i > 0,033$ ,

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – заданные положительные постоянные коэффициенты.

Для решения задачи применяется аналитический подход, который отличается от используемых в работах [1, 9] методов и позволяет свести задачу к решению интегродифференциального уравнения относительно скорости фронта ударной волны  $\dot{R}(t)$ . Решение задачи построено для заданной произвольно убывающей нагрузки  $\sigma_0(t)$ .

На основе получаемых аналитических формул проводятся расчеты параметров среды на фронте ударной волны (УВ) на ЭВМ и сопоставления напряжений, массовой скорости пластической и упругопластической сред при малых и конечных деформациях, а также при  $\varepsilon^*(r) = \varepsilon_0^*$ .

1. Пусть на первоначальную границу сферической каверны  $r = r_0$  приложена интенсивная, монотонно убывающая нагрузка  $\sigma_0(t)$ .

В случае рассмотрения задачи в рамках модели «пластического газа» при выполнении первого уравнения (1) с учетом  $\sigma(\varepsilon) = \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = P$ ,  $\varepsilon(1 - \rho_0/\rho) > 0$ , ( $P$  – давление,  $\rho_0$  – начальная плотность среды) в грунте будет распространяться сферическая УВ  $r = R(t)$ , на фронте которой грунт мгновенно нагружается нелинейным образом, а за ним в области возмущения происходит необратимая жесткая разгрузка среды, и деформация  $\varepsilon$  зависит только от координаты  $r$  и не зависит от времени, т.е.  $\varepsilon = \varepsilon^*(r)$ . Уравнения движения, неразрывности, состояния среды, соотношения на фронте  $r = R(t)$  и граничное условие (начальные условия нулевые) в переменных Лагранжа имеют вид [9]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \left( \frac{r+u}{r} \right)^2 \frac{\partial P}{\partial r}, \quad \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} (r+u)^3 = \frac{\rho_0}{\rho} r^2, \quad \varepsilon = 1 - \frac{\rho_0}{\rho} = \varepsilon^*(r) > 0, \quad (5)$$

$$\dot{u}^*(t) = \dot{R}(t)\varepsilon^*, \quad P^* = \rho_0 \dot{u}^*(t)\dot{R}(t), \quad P^* = \alpha_1 \varepsilon^* + \alpha_2 \varepsilon^{*2}, \quad \left( \dot{R}(t) = \frac{\partial R}{\partial t} \right), \quad (6)$$

при  $r = R(t)$ ,

$$P(r, t) = \sigma_0(t), \quad \text{при } r = r_0, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где  $u$  – перемещение,  $\rho$  – плотность,  $P$  – давление; параметры среды, относящиеся к фронту, обозначены сверху звездочкой.

Подставляя третье уравнение (5) во второе и, интегрируя по  $r$ , получим

$$u(r, t) = \left\{ 3 \int_{r_0}^r [1 - \varepsilon^*(r)] r^2 dr + c(t) \right\}^{1/3} - r. \quad (8)$$

Интегрирование первого уравнения (5) по  $r$  от  $r = r_0$  до  $r = R(t)$  с учетом (7) и (8) дает

$$P^*(t) - \sigma_0(t) = \rho_0 \left\{ \frac{2}{9} [c'(t)]^2 \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ 3 \int_{r_0}^r [1 - \varepsilon^*(r)] r^2 dr + c(t) \right\}^{-7/3} dr - \right. \\ \left. - \frac{c''(t)}{3} \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ 3 \int_{r_0}^r [1 - \varepsilon^*(r)] r^2 dr + c(t) \right\}^{-4/3} dr \right\}, \quad (9)$$

где штрих сверху означает производную по аргументу.

Учитывая, что на фронте волны  $r = R(t)$  перемещение  $u(r, t) \equiv 0$ , из (8) имеем

$$c(t) = R^3(t) - 3 \int_{r_0}^{R(t)} [1 - \varepsilon^*(r)] r^2 dr. \quad (10)$$

Тогда (9) с учетом (10) принимает вид

$$\frac{d\dot{R}(t)}{dt} = \frac{\left\{ -\frac{P^*(t) - \sigma_0(t)}{\rho_0} + 2R^4(t)\dot{R}^2(t)\varepsilon^{*2}(t) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3 \int_{r_0}^r [1 - \varepsilon^*(r)] r^2 dr \right\}^{-7/3} dr \right.}{R^2(t) \left( \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3 \int_{r_0}^r [1 - \varepsilon^*(r)] r^2 dr \right\}^{-4/3} dr} - \\ \frac{2R(t)\dot{R}^2(t)\varepsilon^*(t) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3 \int_{r_0}^r [1 - \varepsilon^*(r)] r^2 dr \right\}^{-4/3} dr}{R^2(t) \left( \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3 \int_{r_0}^r [1 - \varepsilon^*(r)] r^2 dr \right\}^{-4/3} dr}. \quad (11)$$

Из (6) после некоторых преобразований имеем

$$\varepsilon^*(t) = \frac{1}{\alpha_2} [\rho_0 \dot{R}^2(t) - \alpha_1]. \quad (12)$$

Для того чтобы подставить (12) в правую часть (11), вместо подынтегрального выражения  $\varepsilon^*(t)$ , поверхность сферической волны  $r = R(t)$  в первом приближении представляется уравнением

$$r = R(t) \approx r_0 + \dot{R}(0) \cdot t. \quad (13)$$

Справедливость данного приближения (13) подтверждена в [11] расчетами аналогичной задачи в случае малой деформации грунта и результатами предлагаемой работы.

Кроме того, при необходимости выражение (13) может быть уточнено с помощью метода последовательных приближений.

Таким образом, из (11) с учетом третьего уравнения, (6), (12), (13) и считая, что  $\varepsilon^*(r_0 + \dot{R}(0) \cdot t) = \varepsilon^*(t)$ , получим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\dot{R}(t)}{dt} = \left\{ \frac{\alpha_1 \varepsilon^*(t) + \alpha_2 \varepsilon^{*2}(t) - \sigma_0(t)}{\rho_0} + 2R^4(t) \dot{R}^2(t) \varepsilon^{*2}(t) \int_{r_0}^{R(t)} \left\{ R^3(t) - 3\dot{R}(0) \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 - \varepsilon^*(t)] [r_0 + \dot{R}(0) \cdot t]^2 dt \right\}^{-7/3} dr \right. \\ \left. - \frac{R^2(t) \left( \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3\dot{R}(0) \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 - \varepsilon^*(t)] [r_0 + \dot{R}(0) \cdot t]^2 dt \right\}^{-4/3} dr}{2R(t) \dot{R}^2(t) \varepsilon^*(t) \int_{r_0}^{R(t)} \left\{ R^3(t) - 3\dot{R}(0) \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 - \varepsilon^*(t)] [r_0 + \dot{R}(0) \cdot t]^2 dt \right\}^{-4/3} dr} \right. \\ \left. - \frac{R^2(t) \left( \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3\dot{R}(0) \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 - \varepsilon^*(t)] [r_0 + \dot{R}(0) \cdot t]^2 dt \right\}^{-4/3} dr}{R^2(t) \left( \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3\dot{R}(0) \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 - \varepsilon^*(t)] [r_0 + \dot{R}(0) \cdot t]^2 dt \right\}^{-4/3} dr} \right. \quad (14)$$

Уравнение (14) решается численно на ЭВМ методом Кутты-Мерсона при выполнении начальных условий

$$R(0) = r_0, \quad \dot{R}(0) = \dot{R}_0,$$

где  $\dot{R}_0$  определяется из соотношения (6) с учетом (7) при  $t = 0$ .

Если предположить  $\alpha_2 = 0$ , что соответствует распространению в грунте сферической волны с постоянной скоростью  $\dot{R}(t) = a_0 = \sqrt{\alpha_1/\rho_0}$ , то из (9) после некоторых преобразований имеем интегро-дифференциальное уравнение относительно  $\varepsilon^*(t)$ , которое также решается численно.

В случае  $\varepsilon^*(t) = \varepsilon_0^* = const$  уравнение (11), в отличие от предыдущего случая, вырождается в обыкновенное дифференциальное уравнение.

После вычисления координаты  $R(t)$  и скорости  $\dot{R}(t)$  фронта волны в зависимости от времени  $t$ , из соотношений (6) определяются  $\dot{u}^*(t)$ ,  $\varepsilon^*(t)$  и  $P^*(t)$  на фронте сферической ударной волны. Далее с использованием (8) и (10) находится перемещение  $u(r, t)$ , а с учетом первого уравнения (5) – давление  $P(r, t)$  среды в области возмущения.

Аналогичные исследования проведены в случае, когда уравнение состояния среды при нагружении представляется в виде полинома четвертой степени относительно  $\varepsilon^*(t)$ .

2. Решим задачу в рамках упругопластических конечных деформаций среды, исходя из теории [9] с учетом (1) или (2). Как было сказано выше, в случае воздействия на границу каверны монотонно убывающей нагрузки  $\sigma_0(t)$  за фронтом сферической УВ происходит жесткая необратимая разгрузка среды по объемному сжатию, т.е.  $\varepsilon = \varepsilon^*(r)$  и зависимость между  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$  имеет вид

$$\sigma_i - \sigma_i^* = E_2 (\varepsilon_i - \varepsilon_i^*), \quad (15)$$

где  $\varepsilon_i^*$ ,  $\sigma_i^*$  – значения интенсивности деформации и напряжений на фронте сферической УВ.

В связи с этим уравнения движения, неразрывности и состояния упругопластических сред в области разгрузки, а также условия на фронте УВ и на границе каверны в переменных Лагранжа записываются в виде [9]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{(r+u)^2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \frac{\partial}{\partial r} (r+u)^2, \quad (16)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} (r+u)^3 = \frac{\rho_0}{\rho} r^2, \quad \varepsilon = \frac{\rho_0}{\rho} - 1 = \varepsilon^*(r) < 0, \quad (17)$$

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = [\sigma_{rr}^*(r) - \sigma_{\varphi\varphi}^*(r)] + E_2 [\varepsilon_i^*(r) - \varepsilon_i], \tag{18}$$

$$\sigma_{rr}^* = -\rho_0 \dot{R}(t) \cdot \dot{u}^*(t), \quad \dot{u}^*(t) = -\varepsilon^*(t) \cdot \dot{R}(t), \quad \text{при } r = R(t), \tag{19}$$

$$\sigma_{rr}(r, t) = -\sigma_0(t), \quad \text{при } r = r_0, \quad t \geq 0, \tag{20}$$

где

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3} |\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}|, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{r} \right)^2.$$

В уравнения (18) и (19) выражения для  $\sigma_{rr}^*(r)$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}^*(r)$  определяются из формулы (1).

Подставляя (18) в (16) и интегрируя по  $r$  с учетом (8) и (10), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(R(t), t) - \sigma_{rr}(r_0, t) = & \rho_0 \int_{r_0}^{R(t)} \left\{ R^3(t) - 3 \int_r^{R(t)} [1 + \varepsilon^*(r)] r^2 dr \right\}^{-2/3} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dr - \\ & - 2 \int_{r_0}^{R(t)} \left\{ R^3(t) - 3 \int_r^{R(t)} [1 + \varepsilon^*(r)] r^2 dr \right\}^{-1} \left\{ [\sigma_{rr}^*(r) - \sigma_{\varphi\varphi}^*(r)] - 2E_2 \frac{u}{r} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u}{r} \right) \right\} [1 + \varepsilon^*(r)] r^2 dr. \end{aligned} \tag{21}$$

Отсюда с учетом (19), (20), и (21) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{R}(t)}{dt} = & \frac{\left\{ -\rho_0 \dot{R}^2(t) \varepsilon^*(t) - \sigma_0(t) - 2\rho_0 R^4(t) \dot{R}^2(t) \varepsilon^{*2}(t) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3 \int_{r_0}^{R(t)} [1 + \varepsilon^*(r)] r^2 dr \right\}^{-7/3} dr - \right.}{\rho_0 R^2(t) \left[ \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right] \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3 \int_{r_0}^{R(t)} [1 + \varepsilon^*(r)] r^2 dr \right\}^{-4/3} dr} + \\ & - 2\rho_0 R(t) \dot{R}^2(t) \varepsilon^*(t) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3 \int_{r_0}^{R(t)} [1 + \varepsilon^*(r)] r^2 dr \right\}^{-4/3} dr - 2 \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - \right. \\ & + \left. \rho_0 R^2(t) \left[ \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right] \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3 \int_{r_0}^{R(t)} [1 + \varepsilon^*(r)] r^2 dr \right\}^{-4/3} dr \right. \\ & - 3 \int_{r_0}^{R(t)} [1 + \varepsilon^*(r)] r^2 dr \left. \right\}^{-1} \left\{ -\sigma_i^H \left( -\frac{2}{3} \varepsilon^*(r) \right) \left[ \frac{\sigma(\varepsilon^*(r) + 25)}{15} \right] \left[ \sigma_i^b \left( -\frac{2}{3} \varepsilon^*(r) \right) - \sigma_i^H \left( -\frac{2}{3} \varepsilon^*(r) \right) \right] - \right. \\ & + \left. \rho_0 R^2(t) \left[ \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right] \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3 \int_{r_0}^{R(t)} [1 + \varepsilon^*(r)] r^2 dr \right\}^{-4/3} dr \right. \\ & - E_2 \frac{1}{r^2} \left[ R^3(t) - 3 \int_{r_0}^{R(t)} [1 + \varepsilon^*(r)] r^2 dr \right]^{2/3} + E_2 \left\{ [1 + \varepsilon^*(r)] dr \right\} \\ & + \left. \rho_0 R^2(t) \left[ \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right] \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3 \int_{r_0}^{R(t)} [1 + \varepsilon^*(r)] r^2 dr \right\}^{-4/3} dr \right. \end{aligned} \tag{22}$$

Принимая во внимание приближенное равенство (13) и обозначение  $\varepsilon^*(r_0 + \dot{R}(0) \cdot t) = \varepsilon^*(t)$ , уравнение (22) представляется в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d\dot{R}(t)}{dt} = & \frac{\left\{ \rho_0 \dot{R}^2(t) \varepsilon^*(t) - \sigma_0(t) - 2\rho_0 R^4(t) \dot{R}^2(t) \varepsilon^{*2}(t) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3\dot{R}(0) \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 + \varepsilon^*(r)] r_0 + \dot{R}(0) \cdot t \right\}^2 dt \right\}^{-7/3}}{\rho_0 R^2(t) \left( \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3\dot{R}(0) \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 + \varepsilon^*(t)] r_0 + \dot{R}(0) \cdot t \right\}^2 dt \right\}^{-4/3} dr} + \\
& - 2\rho_0 R(t) \dot{R}^2(t) \varepsilon^*(t) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3\dot{R}(0) \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 + \varepsilon^*(t)] r_0 + \dot{R}(0) \cdot t \right\}^2 dt \right\}^{-4/3} dr \Bigg\} + \\
& + \frac{\rho_0 R^2(t) \left( \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3\dot{R}(0) \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 + \varepsilon^*(t)] r_0 + \dot{R}(0) \cdot t \right\}^2 dt \right\}^{-4/3} dr}{-2\dot{R}(0) \int_0^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} (r_0 + \dot{R}(0) \cdot \tau) \left\{ R^3(t) - 3\dot{R}(0) \int_{\tau}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 + \varepsilon^*(t)] r_0 + \dot{R}(0) \cdot t \right\}^2 dt \right\}^{-1} \left\{ -\sigma_i^H \left( -\frac{3}{2} \varepsilon^*(\tau) \right) + \frac{[\sigma(\varepsilon^*(\tau)) + 25]}{15} \right\}} \times \quad (23) \\
& + \frac{\rho_0 R^2(t) \left( \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3\dot{R}(0) \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 + \varepsilon^*(t)] r_0 + \dot{R}(0) \cdot t \right\}^2 dt \right\}^{-4/3} dr}{\left[ \sigma_i^b \left( -\frac{3}{2} \varepsilon^*(\tau) \right) - \sigma_i^H \left( -\frac{3}{2} \varepsilon^*(\tau) \right) \right] - \frac{E_2}{(r_0 + \dot{R}(0) \cdot \tau)^2} \left\{ R^3(t) - 3\dot{R}(0) \int_{\tau}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 + \varepsilon^*(t)] r_0 + \dot{R}(0) \cdot t \right\}^2 dt \right\}^{3/2} + E_2 \left[ 1 + \varepsilon^*(\tau) \right] d\tau} \times \\
& \times \frac{\rho_0 R^2(t) \left( \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3\dot{R}(0) \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 + \varepsilon^*(t)] r_0 + \dot{R}(0) \cdot t \right\}^2 dt \right\}^{-4/3} dr}{\rho_0 R^2(t) \left( \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \left\{ R^3(t) - 3\dot{R}(0) \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 + \varepsilon^*(t)] r_0 + \dot{R}(0) \cdot t \right\}^2 dt \right\}^{-4/3} dr}
\end{aligned}$$

Для вычисления  $\varepsilon^*(t)$  из (19) имеем

$$\sigma_{rr}^* = \rho_0 \cdot \dot{R}^2(t) \cdot \varepsilon^*(t). \quad (24)$$

Учитывая, что для сферической задачи при  $\varepsilon^* < 0$

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{\sigma_{rr}^* + 2\sigma_{\varphi\varphi}^*}{3}, \quad \sigma_i = \sigma_{rr}^* - \sigma_{\varphi\varphi}^*, \quad (25)$$

Из (1) легко получить

$$\sigma_{rr}^* = (\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon^*) \varepsilon^* - \frac{2}{3} \sigma_i^H \left( -\frac{2}{3} \varepsilon^* \right) + \frac{2}{3} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon^*) \varepsilon^* + 25}{15} \left[ \sigma_i^b \left( -\frac{2}{3} \varepsilon^* \right) - \sigma_i^H \left( -\frac{2}{3} \varepsilon^* \right) \right]. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (24) для определения  $\varepsilon^*(t)$  в зависимости от  $\dot{R}(t)$ , будем иметь формулу

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon^*(t)) \varepsilon^*(t) - \frac{2}{3} \sigma_i^H \left( -\frac{2}{3} \varepsilon^*(t) \right) + \frac{2}{3} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon^*(t)) \varepsilon^*(t) + 25}{15} \times \\
& \times \left[ \sigma_i^b \left( -\frac{2}{3} \varepsilon^*(t) \right) - \sigma_i^H \left( -\frac{2}{3} \varepsilon^*(t) \right) \right] - \rho_0 \dot{R}^2(t) \varepsilon^*(t) = 0. \quad (27)
\end{aligned}$$

При использовании (4) уравнение (27) допускает решение

$$\varepsilon^*(t) = \frac{1}{2c} \left\{ [b - \rho_0 \dot{R}^2(t)] - \sqrt{[b - \rho_0 \dot{R}^2(t)]^2 + 4ac} \right\}, \quad (28)$$

где  $\varepsilon^*(t) < 0$ ,  $|\varepsilon^*(t)| > 0,05$  и  $a, b, c$  – известные постоянные положительные коэффициенты.

Следовательно, с учетом (28) сферическая упругопластическая задача сведена к интегро-дифференциальному уравнению (23) относительно скорости фронта волны  $\dot{R}(t)$ , которое решается численно на ЭВМ.

В случае, когда при нагружении и разгрузении среды  $\sigma_i = \sigma_i(\sigma)$ , т.е. взамен второго уравнения (1) имеет место равенство

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -\sigma_0^H + \frac{\sigma(\varepsilon) + 25}{15} (\sigma_0^b - \sigma_0^H), \tag{29}$$

где  $\sigma_0^H = 20 \text{ кз/см}^2$ ,  $\sigma_0^b = 30 \text{ кз/см}^2$ ,

уравнения (23) и (27) примут вид

$$\frac{d\dot{R}(t)}{dt} = \frac{\left\{ \rho_0 \dot{R}^2(t) \varepsilon^*(t) - \sigma_0(t) - 2\rho_0 R^4(t) \dot{R}^2(t) \varepsilon^{*2}(t) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \{R^3(t) - 3\dot{R}(0)\} \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 + \varepsilon^*(t)] [r_0 + \dot{R}(0) \cdot t]^2 dt \right\}^{-7/3} dr}{\rho_0 R^2(t) \left( \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \{R^3(t) - 3\dot{R}(0)\} \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 + \varepsilon^*(t)] [r_0 + \dot{R}(0) \cdot t]^2 dt \}^{-4/3} dr} - \frac{2\rho_0 R(t) \dot{R}^2(t) \varepsilon^*(t) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \{R^3(t) - 3\dot{R}(0)\} \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 + \varepsilon^*(t)] [r_0 + \dot{R}(0) \cdot t]^2 dt \}^{-4/3} dr - 2 \left[ -\sigma_0^H + \frac{5}{3} (\sigma_0^b - \sigma_0^H) \right] \ln \left| \frac{R(t)}{r_0} \right|}{\rho_0 R^2(t) \left( \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \{R^3(t) - 3\dot{R}(0)\} \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 + \varepsilon^*(t)] [r_0 + \dot{R}(0) \cdot t]^2 dt \}^{-4/3} dr} \tag{30}$$

$$\frac{2}{15} (\sigma_0^b - \sigma_0^H) \dot{R}(0) \int_0^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} (r_0 + \dot{R}(0) \tau)^2 [1 + \varepsilon^*(\tau)] [\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon^*(\tau)] \varepsilon^*(\tau) \{R^3(t) - 3\dot{R}(0)\} \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 + \varepsilon^*(r)] [r_0 + \dot{R}(0) \cdot t]^2 dt \}^{-1} d\tau \left. \right\} \rho_0 R^2(t) \left( \varepsilon^*(t) + \dot{R}(t) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \dot{R}} \right) \int_{r_0}^{R(t)} r^2 \{R^3(t) - 3\dot{R}(0)\} \int_{(r-r_0)/\dot{R}(0)}^{(R(t)-r_0)/\dot{R}(0)} [1 + \varepsilon^*(t)] [r_0 + \dot{R}(0) \cdot t]^2 dt \}^{-4/3} dr$$

$$\left( \alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon^*(t) \right) \varepsilon^*(t) - \frac{2}{3} \sigma_0^H + \frac{2}{3} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon^*(t)) \varepsilon^*(t) + 25}{15} (\sigma_0^b - \sigma_0^H) - \rho_0 \dot{R}^2(t) \varepsilon^*(t) = 0. \tag{31}$$

Уравнение (31) имеет решение типа (28).

Аналогичные формулы получены при использовании условия предельного равновесия для грунтов, которое в случае движения среды со сферической симметрией представляется в виде

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -\tau_0 + \mu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}), \tag{32}$$

где  $\tau_0$  и  $\mu$  связаны с коэффициентом сцепления  $k$  и углом  $\nu$  внутреннего трения соотношениями

$$\tau_0 = 2k \cos \nu, \quad \mu = \sin \nu. \tag{33}$$

3. На основе полученных аналитических формул проводились расчеты параметров среды на фронте УВ на ЭВМ и сопоставления напряжений, массовой скорости пластической и упругопластической сред при малых и конечных деформациях, а также при  $\varepsilon^*(r) = \varepsilon_0^*$ .

Расчеты на ЭВМ проведены для случаев, когда профиль действующей на границу сферической каверны  $r = r_0$  нагрузки задан в виде

$$\sigma_0(t) = \frac{\sigma_0 k_1 k_2 (t - \tau)}{(k_1 + k_2 - 1)t - k_1 k_2 \tau}, \tag{34}$$

$$\sigma_0 = 10^3, 5 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad r_0 = 1 \text{ м}, \quad k_1 = 0,00646, \quad k_2 = 0,279, \quad \tau = 1,3 \text{ сек}, \tag{35}$$

и исходные параметры грунта имеют вид

$$\rho_0 = 2 \frac{\text{кНсек}^2}{\text{м}^4}, \quad \alpha_1 = 1,25 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \alpha_2 = 3,5 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \tag{36}$$

$$\rho_0 = 2 \frac{\kappa H \text{сек}^2}{M^4}, \quad \alpha_1 = 1,2127 \cdot 10^2 \text{ МПа}, \quad \alpha_2 = 5,873 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad (37)$$

$$E_2 = 2 \cdot 10^2 \text{ МПа}, \quad \sigma_i^b(\varepsilon_i) = 27,69 + 170,2108(\varepsilon_i^* - 0,033),$$

$$\sigma_i^H(\varepsilon_i) = 17,69 + 170,2108(\varepsilon_i^* - 0,033), \quad \text{при } \varepsilon_i^* > 0,033,$$

$$\mu = 0,2504, \quad \tau_0 = 0,09681 \text{ МПа}. \quad (38)$$

Результаты расчетов в виде графиков  $P^*$ ,  $\dot{u}^*$ ,  $\varepsilon^*$  на фронте сферической волны в зависимости от времени  $t$  и координаты  $r$ , включая кривые для скорости  $\dot{R}(t)$  и радиуса  $R(t)$  фронта волны, представлены на рис. 1-6. Причем на рис. 1, 2 (3-6) штиховые и сплошные линии относятся к модели «пластического газа» с исходными данными (36) при малых и конечных деформациях среды (упругопластической среды с параметрами (37) и (38)), а штриховые линии с точками к несжимаемой пластической среде в случае  $\varepsilon^*(r) = \varepsilon_0^* = 0,152$  (модели «пластического газа» при конечных деформациях с учетом первых трех коэффициентов (37)).

Из кривых, представленных на рис. 2, 4, 6, видно, что уменьшения величин давления  $P^*$ , массовой скорости  $\dot{u}^*$  и деформации  $\varepsilon^*$  на фронте сферической волны в зависимости от расстояния происходит по нелинейному закону. При использовании (36), что соответствует водонасыщенному грунту, уровень давления (направления) в волне на расстояние  $r = 10$  м, начиная с каверны единичного радиуса, по сравнению с величиной амплитуды, действующей на границу каверны нагрузки  $\sigma_0 = 10^3 \text{ МПа}$ , снижается приблизительно в  $(6 \div 7)$  раз. Кривые распределения давления времени  $t$  (рис. 1) и по координате  $r$  (рис. 2) для «пластического газа» (сплошные линии) и несжимаемой пластической среды (штриховые линии с точками) существенных отличий не имеют, а остальные параметры заметно отличаются. В интервалах расстояния  $r_0 < r \leq r_1 = 15$  м или времени  $0 < t \leq 0,01$  сек в несжимаемой среде, по сравнению с  $\varepsilon = \varepsilon^*(r)$ , происходит уменьшение (увеличение) величин  $\dot{R}$ ,  $R(\dot{u}^*, \varepsilon^*)$ .

Параметры взрывной волны  $P^*$ ,  $\dot{u}^*$ ,  $\varepsilon^*$ ,  $\dot{R}$ , вычисленные по теории малых деформаций, в ближней зоне в зависимости от  $r$  (рис. 2) приобретают заниженные значения, чем в случае конечных деформаций. Причем величины параметров  $P^*$ ,  $\dot{u}^*$ ,  $\varepsilon^*$ , рассчитанные по теориям малых и конечных деформаций, при  $r > 3$  м отличаются между собой в несколько раз.

Анализируя результаты серии расчетов, обнаружено, что если в случае  $\alpha_2 = 0$ , что соответствует распространению сферической волны с постоянной скоростью  $\dot{R} = (\alpha_1 / \rho_0)^{1/2}$ , коэффициент  $\alpha_1$  вычисляется с помощью хорды, пересекающей кривую  $P \sim \varepsilon$  в точке с заданной величиной  $P = \sigma_0$  (с помощью касательной к кривой  $P \sim \varepsilon$  в точке  $\varepsilon = 0$ ), то процесс затухания давления по  $t$  при  $0 < t \leq 0,01$  сек на фронте волны происходит медленнее (быстрее), нежели в случае (36). Это связано с тем, что в одном случае жесткость среды в процессе нагружения увеличивается, а в другом - уменьшается.



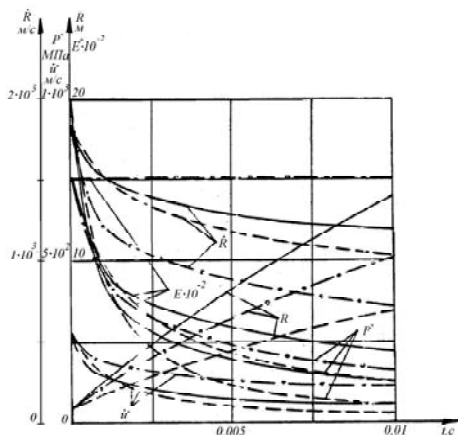


Рисунок 1

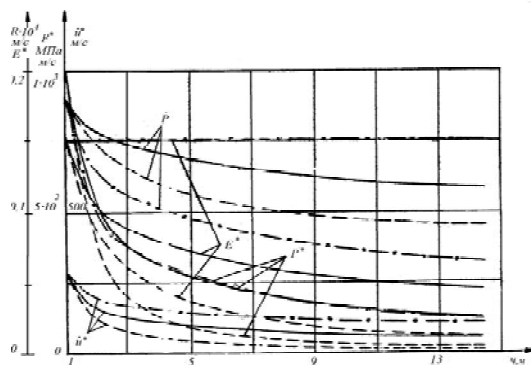


Рисунок 2

В рассматриваемом интервале времени  $0 < t \leq 0,01$  сек изменения радиуса фронта волны  $R(t)$  (рис. 1, 3, 5) в зависимости от времени почти не отличаются от прямой линии. Их отличия от прямой составляют  $(1 \div 5)$  процента.

Отметим, что во всех случаях характер спада напряжений по  $r$  от воздействия сферической волны взрыва существенно образом зависит от профиля нагрузки (34) и физико-механических свойств среды, описываемых различными адекватными моделями. Результаты для мелкозернистого песка, полученные на основе моделей «пластического» и упругопластической среды в двух вариантах с учетом (37) и (38), показывают, что при  $r = 9$  м (рис. 4) величина давления по сравнению с  $\sigma_0 = 10^3$  МПа уменьшается соответственно до уровней  $P^* = 210, 90, 65$  МПа, тогда как в предыдущем случае для водонасыщенного грунта имеем  $P^* = 180$  МПа. Кривые  $P^*(t), \varepsilon^*(t), (\dot{u}^*(t), \dot{R}(t))$  для водонасыщенного грунта (рис. 1, сплошные линии), полученные в рамках «пластического газа», расположены ниже (выше) соответствующих кривых для песка (рис. 3, штриховые линии с точками). При одних и тех же давлениях сухой песок на фронте волны испытывает большую деформацию, чем водонасыщенный грунт.

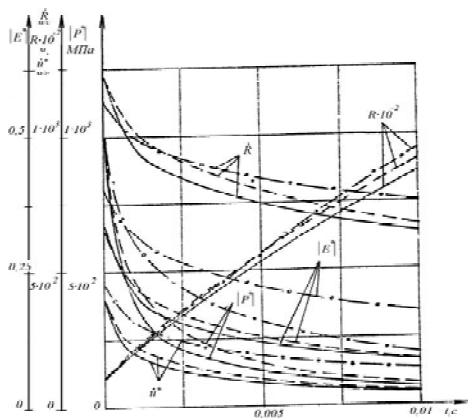


Рисунок 3

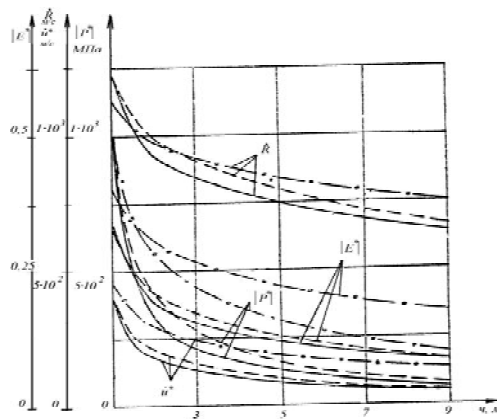


Рисунок 4

Учет прочностных характеристик упругопластической среды с помощью выражений (37) и (38) (рис. 3-6, сплошная и штриховая линии) приводит к уменьшению величин давления на фронте сферической волны по сравнению с соответствующими значениями давления на фронте пластической волны (рис. 3-6, штриховая линия с точками).

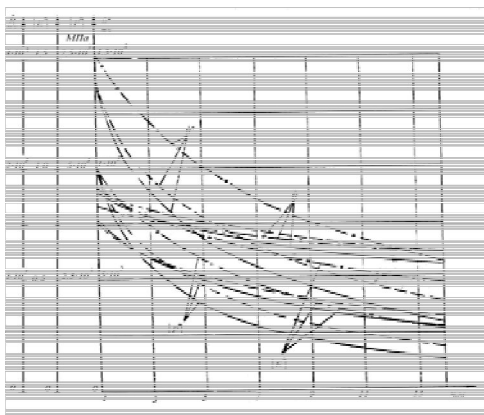


Рисунок 5

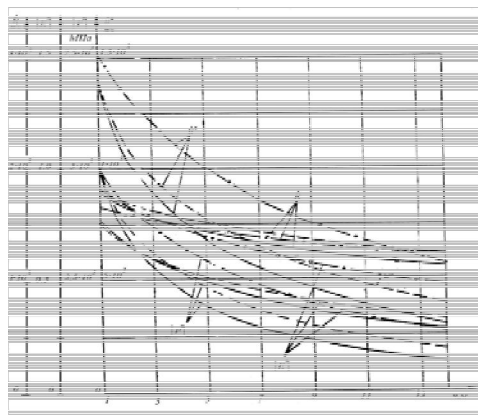


Рисунок 6

Это обстоятельство обусловлено тем, что при использовании модели «пластического газа» среда обжата со всех сторон одним и тем же давлением, а в упругопластической среде  $|\sigma_{rr}| > |\sigma_{\varphi\varphi}| = |\sigma_{\theta\theta}|$ . Следовательно, модель «пластического газа» позволяет оценить величины напряжения на фронте сферической волны сверху. Аналогичный эффект был обнаружен ранее в работе [9] в процессе решения вышеуказанной задачи с использованием теории предельного равновесия.

Кроме того, анализируя поведения кривых  $P^*$ ,  $\dot{u}^*$ ,  $\varepsilon^*$  для упругопластической среды в зависимости от времени (рис. 3, 5), заметим, что в случае учета необратимых процессов по формоизменению среды с помощью (37) процесс затухания величины давления  $P^*$ , скорости  $\dot{u}^*$  и деформации  $\varepsilon^*$  по  $t$  на фронте волны получается сравнительно слабее, нежели в случае (38).

## Список литературы

1. Рахматуллин Х.А. О распространении ударной волны взрыва в грунтах / Х.А. Рахматуллин, Л.И. Степанова // Вопросы теории разрушения пород действием взрыва. - М.: Изд-во АН СССР, 1958.
2. Луц Я.Л. Распространение сферических упругопластических волн // ПММ. - Т.13. - №1.
3. Зволинский Н.В. Об излучении упругой волны при сферическом взрыве в грунте // ПММ. - 1960. - Т.24. - № 1.
4. Григорян С.С. О действии сильного подземного взрыва в плотной горной породе / С.С. Григорян, Я.А. Пачевский // ДАН СССР. - 1973. - Т.212. - № 2.
5. Механический эффект подземного взрыва // Под ред. М.А. Садовского. - М., 1971.
6. Коротков П.Ф. Численное исследование взрыва в упругопластической среде и некоторые вопросы моделирования / П.Ф. Коротков, Б.М. Просвирнина // ДАН СССР. - 1976. - Т.228. - № 1.
7. Якупов Р.Г. Сферическая взрывная волна в грунтах // ФГВ. - 1976. - Т.12. - № 5.
8. Сагомоян А.Н. Взрыв сферического слоя заряда в пластически сжимаемой среде / А.Н. Сагомоян, П.М. Гарбер // Вестник МГУ. Серия 1. Математика и механика. - М., 1974. - №3.
9. Рахматуллин Х.А. Вопросы Динамики грунтов / Х.А. Рахматуллин, А.Я. Сагомоян, Н.А. Алексеев. - М.: Изд-во МГУ, 1964.
10. Ломизе Г.М. Исследование закономерностей развития напряженно-деформированного

состояния песчаного основания при плоской деформации / Г.М. Ломизе, А.Л. Крыжановский, В.Ф. Петрянин // Основания, фундаменты и механика грунтов. - 1972. - № 1.

11. Атабаев К. О распространении одномерных волн в среде с нелинейной разгрузкой / К. Атабаев, Ш.Г. Абдужалилов, Н.М. Тураев // ДАН Уз.ССР. - 1988. - № 9.
12. Броуд Г.Л. Расчеты взрывов на ЭВМ. Подземные взрывы. - М.: Изд-во МИР, 1975.

Получено 16.06.10

УДК 531: 622.233: 622.235

**М.Н. Калимолдаев, Т.Ж. Мазаков, С.А. Тусупова**

Институт проблем информатики и управления МОН РК, г. Алматы

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК  
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ**

**Постановка задачи.** Рассмотрим влияние краевых условий на частоты неосесимметричных колебаний цилиндрических оболочек в зависимости от длины и толщины оболочки.

Пусть дана упрощенная система уравнений колебаний тонкой оболочки

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \varphi} + \nu \frac{\partial w}{\partial \xi} &= L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= L \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + \beta \nabla^2 \nabla^2 w &= -L \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Данную систему уравнений колебаний тонкой оболочки можно привести к более удобному виду [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{1-\nu^2} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} &= -\frac{L}{1-\nu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [-\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + (3+2\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{3-\nu}{1-\nu} \beta \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + \\ + 2(1+\nu) \frac{L}{1-\nu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &(-w - \beta \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{3-\nu}{2} \nabla^2 w - L \frac{\partial^2 w}{\partial t^2})], \\ \nabla^2 \nabla^2 u - \frac{2}{1-\nu} L \frac{\partial^2}{\partial t^2} &\left[ \frac{3-\nu}{2} \nabla^2 u - L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{2\nu}{1-\nu} L \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right), \\ \nabla^2 \nabla^2 v - \frac{2}{1-\nu} L \frac{\partial^2}{\partial t^2} &\left[ \frac{3-\nu}{2} \nabla^2 v - L \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ (2+\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{2\nu}{1-\nu} L \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u$  - проекция вектора перемещения точки срединной поверхности на ось  $X$ ;  $v$  - проекция вектора перемещения точки срединной поверхности на ось  $Y$ ;  $w$  - проекция вектора перемещения точки срединной поверхности на ось  $Z$ ;  $\nu$  - коэффициент Пуассона;  $\beta$  - параметр толщины оболочки;  $\xi$  - безразмерная осевая координата  $\xi = \frac{x}{a}$ ;  $x$  - осевая координата;  $a$  - радиус срединной поверхности;  $E$  - модуль упругости материала