ления // Вестник МГУ (матем, механика). - 1973. - № 6. - М., 1973.
3. Шейнин А.М. Методы определения и поддержания надежности автомобилей в эксплуатации. - М.: Транспорт, 1968.
4. Шейнин А.М. Управление надежностью машин в эксплуатации с использованием АСУ. Двойной выпуск. - М.: Знание, 1980.
5. Кульсеитов Ж.О. Прогнозирование повышения уровня надежности машин // Материалы научной сессии отделения физ.-мат. наук, посвященной проблемам развития механики и машиностроения в Казахстане. – Алматы: Институт механики и машиноведения НАН РК, 1993. – С. 164-165.
6. Кульсеитов Ж.О. Математические модели и поддержание надежности машин / Ж.С. Кульсеитов, В.П. Лисьев. - Алматы: Гылым, 1996. - 222 с.
7. Джолдасбеков У.А. Математические модели теории восстановления работоспособности машин и их применение. Препринт / У.А. Джолдасбеков, Ж.О. Кульсеитов. - Алматы: МН-АН РК, 1997. - 41 с.
8. Кульсеитов Ж.О. Методические вопросы эксплутационных испытаний машин на надежность // Научное приложение «Поиск» к международному журналу «Вестник высшей школы Казахстана» МО РК. - 1997. - № 2. - С. 127-135.
9. Джолдасбеков У.А. Закон Эрланга в процессах восстановления работоспособности машин и механизмов / У.А. Джолдасбеков, Ж.О. Кульсеитов // Докл. МН.-АН РК. 1997. - №4.- С.3-9.

Получено 18.03.10

УДК 621.8:625.7-192

Ж.О. Кульсеитов, В.Н. Сидоренко, А.М. Жандарбекова
ВКГТУ им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск

ЗАКОН ЭРЛАНГА В ПРОЦЕССАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ РАБОТОСПОСОБНОСТИ МАШИН

Рассмотрим простой, общий, общий нестационарный процессы восстановления работоспособности механических систем.

Пусть интервалы времени безотказной работы каждого элемента технической системы распределены по закону Эрланга некоторого порядка n.

$$f(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}, \quad t\geq 0, \quad \lambda>0.$$

Случай простого и общего процессов восстановления рассмотрены в работах [1-3].

В случае простого процесса плотность восстановления $h(t)$ имеет вид

$$h(t)=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{kn-1}(t,\lambda),$$

а функция восстановления $H(t)$

$$H(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[1-\sum_{i=1}^{kn-1}\varphi_i(t,\lambda)\right].$$

Эти формулы не могут быть записаны в более компактной форме, явно характеризующей все свойства функции $h(t)$ и $H(t)$.

Теперь рассмотрим нестационарный случай

$$f^{(1)}(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}e^{-\lambda t}, \quad f^{(2)}(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!}e^{-\lambda t},$$

$$f^{(k)}(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{n_k-1}}{(n_k-1)!}e^{-\lambda t}, \quad k\geq 3, \quad t\geq 0, \quad \lambda>0.$$

Тогда

$$f_1(t) = f^{(1)}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}e^{-\lambda t},$$

$$f_2(t) = \int_0^t f^{(2)}(x)\cdot f_1(t-x)dx = \frac{\lambda(\lambda t)^{n_1+n_2-1}}{(n_1+n_2-1)!}e^{-\lambda t},$$

$$f_3(t) = \int_0^t f^{(3)}(x)\cdot f_2(t-x)dx = \frac{\lambda(\lambda t)^{n_1+n_2+n_3-1}}{(n_1+n_2+n_3-1)!}e^{-\lambda t},$$

$$f_k(t) = \int_0^t f^{k}(x)\cdot f_{k-1}(t-x)dx = \frac{\lambda(\lambda t)^{n_1+n_2+k(n_3-2)-1}}{(n+n_2+k(n_3-2)-1)!}e^{-\lambda t},\ k>3.$$

По общим формулам несложно вычислить плотность восстановления $h(t)$. При этом функция восстановления вычисляется как

$$H(t) = F_1(t) + F_2(t) + \sum_{k=0}^{\infty} F_{3+k}(t),$$

где

$$F_1(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n_1-1}\varphi_k(t,\lambda),\quad F_2(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n_1+n_2-1}\varphi_k(t,\lambda),$$

$$F_s(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n_1+n_2+3(s-2)-1}\varphi_k\ (t,\lambda),\ S \ge 3.$$

Обработка информации об отказах деталей и узлов дорожно-строительных машин показала, что экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими законами Эрланга. При этом выявлено, что показатель n имеет тенденцию уменьшения по мере старения агрегата (узла машины) [4, 5]. Применительно к механическим системам (редукторы, коробки перемены передач) чаще всего имели место такие данные: $n_1 = 6$, $n_2 = 4$, а $n_3 = 3$.

Для современных дорожных и строительных машин вполне достаточно рассмотрение показателей надежности их агрегатов и узлов до первого, второго, третьего и четвертого отказов. Эксплуатация машин в течение двадцати-тридцати лет, как это было раньше при социалистической системе хозяйствования, сейчас в условиях рынка абсолютно невыгодна. Это наводит на мысль относительно получения формул для определения $h(t)$ и $H(t)$ в явном виде ограничиваясь тремя-четырьмя отказами.

Произведем расчет для случая $n_1 = 6$, $n_2 = 4$, а $n_3 = 3$. При этом

$$h(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^5}{5!}e^{-\lambda t}+\frac{\lambda(\lambda t)^9}{9!}e^{-\lambda t}+\frac{\lambda(\lambda t)^{12}}{12!}e^{-\lambda t}+\frac{\lambda(\lambda t)^{15}}{15!}e^{-\lambda t}+\cdots\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(t)\,\frac{\lambda(\lambda t)^5}{5!}e^{-\lambda t}+\left[\lambda e^{-\lambda t}+\frac{\lambda(\lambda t)^3}{3!}e^{-\lambda t}+\frac{\lambda(\lambda t)^6}{6!}e^{-\lambda t}+\frac{\lambda(\lambda t)^9}{9!}e^{-\lambda t}+\cdots\right]-$$

$$-\left[\lambda e^{-\lambda t}+\frac{\lambda(\lambda t)^3}{3!}e^{-\lambda t}+\frac{(\lambda t)^6}{6!}e^{-\lambda t}\right]=\lambda e^{-\lambda t}\left[1+\frac{(\lambda t)^3}{3!}+\frac{(\lambda t)^6}{6!}+\frac{(\lambda t)^9}{9!}+\frac{(\lambda t)^{12}}{12!}+\cdots\right]-$$

$$-\lambda e^{-\lambda t}\left[1+\frac{(\lambda t)^3}{3}+\frac{(\lambda t)^6}{6!}-\frac{(\lambda t)^5}{5!}\right]=\lambda e^{-\lambda t}\,\frac{1}{3}\left[e^{\lambda t}+2e^{-\frac{\lambda t}{2}}cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right]-\lambda e^{-\lambda t}\left[1+\frac{(\lambda t)^3}{3!}+\frac{(\lambda t)^6}{6!}-\frac{(\lambda t)^5}{5!}\right]=$$

$$=\frac{\lambda}{3}\left[1+2e^{-\frac{3\lambda t}{2}}cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right]-\lambda e^{-\lambda t}\left[1+\frac{(\lambda t)^3}{3!}+\frac{(\lambda t)^6}{6!}-\frac{(\lambda t)^5}{5!}\right].$$

Для рассматриваемого случая имеем:

$$h(t)=\frac{\lambda}{3}\left[1+2e^{-\frac{3\lambda}{2}t}\cdot cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right]-\lambda e^{-\lambda t}\left[1+\frac{(\lambda t)^3}{3!}+\frac{(\lambda t)^6}{6!}-\frac{(\lambda t)^5}{5!}\right].$$

Интегрирование $h(t)$ от 0 до t позволяет получить:

$$H(t)=\frac{\lambda}{3}t+\frac{2}{3}\lambda\left[\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{3}{2}\lambda t}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)-cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t+\frac{1}{2\lambda}\right)\right)\right]-\left(1-e^{\lambda t}\right)-$$

$$-\left[1-\left(1+\cdots+\frac{(\lambda t)^3}{3!}\right)e^{-\lambda t}+1-\left(1+\cdots+\frac{(\lambda t)^6}{6!}\right)e^{-\lambda t}-1+\left(1+\cdots+\frac{\lambda t^5}{5!}\right)e^{-\lambda t}\right]=$$

$$=\frac{\lambda}{3}t+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda t}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)-cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)-2+2e^{-\lambda t}\left(\frac{\lambda t}{1!}+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\frac{(\lambda t)^3}{3!}+\frac{(\lambda t)^6}{6!}\right)e^{-\lambda t}\right).$$

Для рассматриваемого случая имеем:

$$H(t)=\frac{\lambda}{3}t-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\lambda t}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)-cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right]+\left[2+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\frac{(\lambda t)^3}{3!}+\frac{(\lambda t)^6}{6!}\right]e^{-\lambda t}.$$

Список литературы

1. Кокс Д.Р. Теория восстановления / Д.Р. Кокс, В.Л. Смит. - М.: Советское радио, 1967. - 299 с.
2. Чепурин Е.В. О статистических выводах для процессов восстановления // Статистические методы в теории надежности и контроля качества. - М.: Издательство МГУ, 1973. - Вып.43.
3. Чепурин Е.В. О проверке гипотезы, что точечный поток является процессом восстановления // Вестник МГУ (математика, механика). - 1973. - № 6. - М., 1973.
4. Кульсеитов Ж.О. Математические модели и поддержание надежности машин / Ж.С. Кульсеитов, В.П. Лисьев. - Алматы: Гылым, 1996. - 222 с.
5. Веригин Ю.А. Организация эксплуатационных испытаний на надежность дорожно-строительных машин / Ю.А. Веригин, Ж.О. Кульсеитов, А.М. Жандарбекова // Вестник ТОГУ. - 2008. - №1 (8). - Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2008. - С.45-52.

Получено 10.03.10