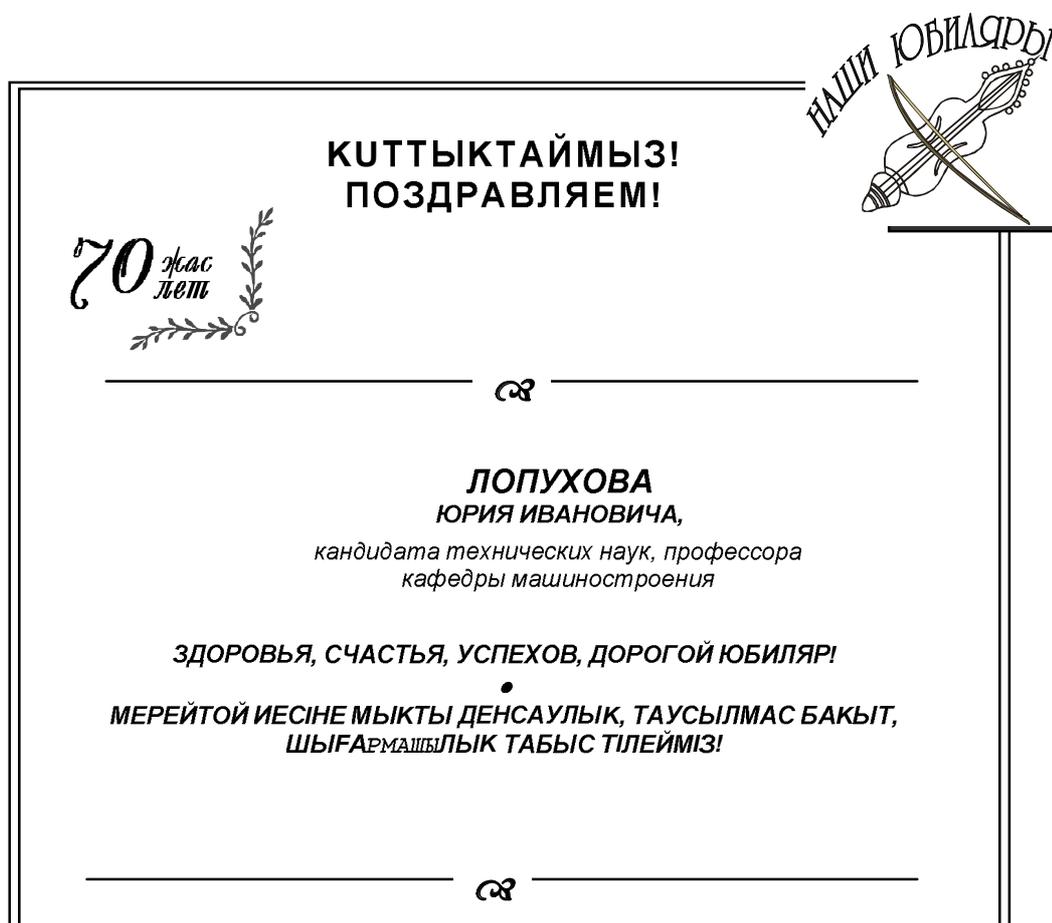


1. Кликушин Ю.Н. Методы и средства идентификационных измерений сигналов / Ю.Н. Кликушин, К.Т. Кошеков. – Петропавловск: Изд-во СКГУ им. М.Козыбаева, 2007. – 186 с.
2. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. – М.: Мир, 1983. – Кн. 1-2.
3. Мухин В.И. Исследование систем управления. – М.: Изд-во Экзамен, 2006. – 2 изд., доп. и перераб. – 479 с.

Получено 4.02.10



УДК 621.8:625.7-192

Ж.О. Кульсеитов, В.Н. Сидоренко, А.М. Жандарбекова
ВКГТУ им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭРЛАНГА

ПО ДАННЫМ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ИСПЫТАНИЙ МАШИН

Пусть предполагается, что распределение значений некоторой случайной величины подчинено закону Эрланга с параметрами n и λ

$$f(t, \lambda, n) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \quad n \geq 3 \text{ и } \lambda > 0.$$

Ставится задача на основании результатов испытаний на надежность в реальных условиях эксплуатации машин определить эмпирические значения параметров закона распределения. Результаты испытаний заданы в таблице.

Результаты испытаний

Значения случайной наработки, t_i	t_1	t_2	...	t_k
Частоты, n	n_1	n_2	...	n_k

Для определения параметров n и λ по данным эксплуатационных испытаний машин на надежность воспользуемся методом максимального правдоподобия Фишера. Составим функцию правдоподобия

$$L(t_1, t_2, \dots, t_k, \lambda, n) = (f(t_1, \lambda, n))^{n_1} \cdot (f(t_2, \lambda, n))^{n_2} \dots (f(t_k, \lambda, n))^{n_k}.$$

При этом можно записать

$$\begin{aligned} L(t_1, t_2, \dots, t_k, \lambda, n) &= \prod_{i=1}^k \left(\frac{\lambda(\lambda t_i)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t_i} \right)^{n_i} = \left(\frac{\lambda(\lambda t_1)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t_1} \right)^{n_1} \cdot \left(\frac{\lambda(\lambda t_2)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t_2} \right)^{n_2} \dots \\ &\dots \left(\frac{\lambda(\lambda t_k)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t_k} \right)^{n_k} = \prod_{i=1}^k t_i^{n_i(n-1)} \cdot \frac{\lambda^{Nn}}{(n-1)!} e^{-\lambda \sum_{i=1}^k t_i n_i}. \end{aligned}$$

Параметры n и λ следует определять так, чтобы функция $L(t_1, t_2, \dots, t_k, \lambda, n)$ достигала максимального значения. Прологарифмируя данную функцию, можно найти ее частные производные, т.е.

$$\ln L(t_1, t_2, \dots, t_k, \lambda, n) = \ln \left(\prod_{i=1}^k t_i^{n_i(n-1)} \cdot \frac{\lambda^{Nn}}{(n-1)!} e^{-\lambda \sum_{i=1}^k t_i n_i} \right) = N \cdot n \cdot \ln \lambda + \quad (4)$$

$$+ (n-1) \cdot \ln \left(\prod_{i=1}^k t_i^{n_i} \right) - \lambda \sum_{i=1}^k (t_i n_i) + n \cdot N - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - N \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln(n),$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(t_1, t_2, \dots, t_k, \lambda, n) = \frac{N \cdot n}{\lambda} - \sum_{i=1}^k t_i n_i, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln L(t_1, t_2, \dots, t_k, \lambda, n) = N \ln(\lambda) + \ln \left(\prod_{i=1}^k t_i^{n_i} \right) + N - N \cdot \ln(n) - N \frac{n - \frac{1}{2}}{n} =$$

$$= \ln \left(\prod_{i=1}^k t_i^{n_i} - N \cdot \ln \left(\frac{n}{\lambda} \right) + \frac{N}{2n} \right),$$

где N – объем выборки.

Для того чтобы производная по параметру n вообще могла быть найдена, факториал $(n-1)!$ заменим по формуле Стирлинга

$$(n-1)! = \frac{1!}{n} = \frac{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}{n} = n^{n-1} \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} = n^{n-\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi}.$$

Приравняв частные производные к нулю, несложно найти точку возможного экстремума

$$\begin{cases} \frac{N \cdot n}{\lambda} - \sum_{i=1}^k t_i n_i = 0 \\ \ln \left(\prod_{i=1}^k t_i^{n_i} \right) - N \cdot \ln \left(\frac{n}{\lambda} \right) + \frac{N}{2n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k t_i n_i \\ \ln \left(\prod_{i=1}^k t_i^{n_i} \right) - N \cdot \ln \left(\frac{n}{\lambda} \right) + \frac{N}{2\pi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \left(\prod_{i=1}^k t_i^{n_i} \right) - N \cdot \ln \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k t_i n_i \right) + \frac{N}{2\pi} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi} = \left(\frac{1}{N} \right) \ln \left(\prod_{i=1}^k t_i^{n_i} \right) - \ln \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k t_i n_i \right).$$

Окончательно искомые параметры n и λ могут быть определены по формулам

$$n = 0,5 / \ln \left[\frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k t_i n_i}{\left(\prod_{i=1}^k t_i^{n_i} \right)^{\frac{1}{N}}} \right], \quad \frac{n}{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k t_i n_i.$$

Чтобы убедиться, что в данной точке функция максимального правдоподобия достигает максимума, следует найти вторые производные этой функции и проверить выполнение достаточного условия максимума. При этом

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln L(t_1, t_2, \dots, t_k, \lambda, n) &= \frac{N \cdot n}{\lambda^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial n} \ln L(t_1, t_2, \dots, t_k, \lambda, n) = \frac{N}{\lambda}, \\ \frac{\partial^2}{\partial n^2} \ln L(t_1, t_2, \dots, t_k, \lambda, n) &= \frac{N}{n} - N \cdot \frac{1}{2n^2} \Rightarrow \Delta = \frac{N \cdot n}{\lambda^2} \left(-\frac{N}{n} - \frac{N}{2n^2} \right) - \left(\frac{N}{\lambda} \right)^2 = \\ &= \frac{N^2}{\lambda^2} + \frac{N^2}{2\lambda^2 n} - \frac{N^2}{\lambda^2} = \frac{N^2}{2\lambda^2 n} > 0. \end{aligned}$$

Из того, что

$$\Delta > 0, \text{ а } \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln L(t_1, t_2, \dots, t_k, \lambda, n) = -\frac{N \cdot n}{\lambda^2} < 0,$$

следует, что при данных значениях параметров n и λ функция максимального правдоподобия достигает максимума.

Так как значение параметра n для закона Эрланга является целым числом, то оценка этого параметра, полученная на основе вышеприведенной, формулы определяется до ближайшего целого, т.е. полагают

$$n = \left[0,5 / \ln \left(\frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k t_i n_i}{\left(\prod_{k=1}^k t_i^{n_i} \right)^{\frac{1}{k}}} \right) \right].$$

Проверку гипотезы о равенстве полученных параметров можно осуществлять по методу Пирсона и (или) Романовского.

По критерию Пирсона необходимо найти эмпирические частоты n'_i , используя результаты эксплуатационных испытаний на надежность агрегатов и узлов машин, и затем вычислить χ^2 статистику по известной формуле

$$\chi_{набл}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n'_i - n_i)^2}{n'_i}.$$

Для определения эмпирических частот удобней найти эмпирические вероятности по значениям n и λ через функцию распределения закона Эрланга

$$p(t_i) = F(t_i, \lambda, n) - F(t_{i-1}, \lambda, n), \quad i = 1, \dots, k.$$

При этом

$$F(t_0, \lambda, n) = 0 \quad \text{и} \quad F(t_i, \lambda, n) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \quad \text{при } i \geq 1.$$

Тогда значения эмпирических частот будут равны

$$n'_i = N \cdot p(t_i).$$

Далее, при заданном уровне значимости α и степеней свободы $r = k - 3$ по таблице распределения χ^2 можно найти $\chi_{кр}^2$, с которым следует сравнить $\chi_{набл}^2$.

Затем по критерию Романовского вычисляется величина

$$R = \frac{|\chi^2 - r|}{\sqrt{2r}}.$$

Если эта величина меньше 3, то расхождение теоретических и эмпирических частот случайно.

В ранее выполненных исследованиях в области теории восстановления [1-4] для вычисления функции и плотности восстановления использованы различные теоретические законы распределения случайной величины.

Применение математических методов теории восстановления для работоспособности машин открыло широкую возможность исследованиям в области надежности восстанавливаемых технических систем [5-7 и др.].

Организация испытаний машин в реальных эксплуатационных условиях и обработка информации об отказах агрегатов и узлов автобусных конструкции, дорожно-строительных машин показали, что в ряде случаев распределение наработок лучше всего согласуется с двухпараметрическим законом Эрланга [8, 9].

Список литературы

1. Кокс Д.Р. Теория восстановления / Д.Р. Кокс, В.Л. Смит. - М.: Советское радио, 1967. - 299 с.
2. Чепурин Е.В. О проверке гипотезы, что точечный поток является процессом восстанов-

- ления // Вестник МГУ (матем, механика). - 1973. - № 6. - М., 1973.
3. Шейнин А.М. Методы определения и поддержания надежности автомобилей в эксплуатации. - М.: Транспорт, 1968.
 4. Шейнин А.М. Управление надежностью машин в эксплуатации с использованием АСУ. Двойной выпуск. - М.: Знание, 1980.
 5. Кульсеитов Ж.О. Прогнозирование повышения уровня надежности машин // Материалы научной сессии отделения физ.-мат. наук, посвященной проблемам развития механики и машиностроения в Казахстане. - Алматы: Институт механики и машиноведения НАН РК, 1993. - С. 164-165.
 6. Кульсеитов Ж.О. Математические модели и поддержание надежности машин / Ж.С. Кульсеитов, В.П. Лисьев. - Алматы: Гылым, 1996. - 222 с.
 7. Джолдасбеков У.А. Математические модели теории восстановления работоспособности машин и их применение. Препринт / У.А. Джолдасбеков, Ж.О. Кульсеитов. - Алматы: МН-АН РК, 1997. - 41 с.
 8. Кульсеитов Ж.О. Методические вопросы эксплуатационных испытаний машин на надежность // Научное приложение «Поиск» к международному журналу «Вестник высшей школы Казахстана» МО РК. - 1997. - № 2. - С. 127-135.
 9. Джолдасбеков У.А. Закон Эрланга в процессах восстановления работоспособности машин и механизмов / У.А. Джолдасбеков, Ж.О. Кульсеитов // Докл. МН.-АН РК. 1997. - №4. - С.3-9.

Получено 18.03.10

УДК 621.8:625.7-192

Ж.О. Кульсеитов, В.Н. Сидоренко, А.М. Жандарбекова
ВКГТУ им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск

ЗАКОН ЭРЛАНГА В ПРОЦЕССАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ РАБОТОСПОСОБНОСТИ МАШИН

Рассмотрим простой, общий, общий нестационарный процессы восстановления работоспособности механических систем.

Пусть интервалы времени безотказной работы каждого элемента технической системы распределены по закону Эрланга некоторого порядка n .

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

Случай простого и общего процессов восстановления рассмотрены в работах [1-3].

В случае простого процесса плотность восстановления $h(t)$ имеет вид

$$h(t) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{kn-1}(t, \lambda),$$

а функция восстановления $H(t)$

$$H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \sum_{i=1}^{kn-1} \varphi_i(t, \lambda) \right].$$

Эти формулы не могут быть записаны в более компактной форме, явно характеризующей все свойства функции $h(t)$ и $H(t)$.

Теперь рассмотрим нестационарный случай

$$f^{(1)}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} e^{-\lambda t}, \quad f^{(2)}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} e^{-\lambda t},$$

$$f^{(k)}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n_k-1}}{(n_k-1)!} e^{-\lambda t}, \quad k \geq 3, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0.$$