



УДК 681.3.06

О.Е. Бакланова

ВКГТУ, г. Усть-Каменогорск

**РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА $\Sigma\Pi$ -АППРОКСИМАЦИИ НА НЕПРЕРЫВНЫХ В-СПЛАЙНАХ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО СЖАТИЮ ДАННЫХ**

Достижением последнего десятилетия стало широкое применение цифровой техники во многих прикладных областях. Это связано с совершенствованием цифровой измерительной аппаратуры, возможностью и удобством использования компьютеров для обработки, передачи и хранения поступающих данных. При этом объем хранимых и передаваемых данных весьма велик. Возникает проблема эффективного сжатия данных.

В зависимости от типа информации требуются различные алгоритмы сжатия. В настоящее время разработаны эффективные методы архивации данных. Эти алгоритмы кодируют данные без потери информации. Они основаны на замене часто повторяющихся последовательностей короткими кодами (кодирование по алгоритму Хаффмана или Лемпеля-Зива). Эти методы, хорошо применимые при сжатии текстов и монохромных изображений, неэффективны при сжатии вещественных данных (упаковке вещественных таблиц, сжатии экспериментальных данных), а также при сжатии полутоновых и цветных изображений.

Одним из эффективных вычислительных методов сжатия вещественных данных, являющихся функциональными зависимостями от двух переменных, может быть алгоритм $\Sigma\Pi$ -приближения. Этот алгоритм позволяет сжимать данные с желаемым уровнем точности. При этом процесс восстановления данных, в отличие от многих алгоритмов, выполняется достаточно быстро.

1. Необходимые сведения из теории $\Sigma\Pi$ -аппроксимаций.

Алгоритм $\Sigma\Pi$ -аппроксимации основан на приближении функции двух переменных суммами произведений одномерных функций. Этот способ приближения, начало которому положено в работах Шмидта в 1907 году, в настоящее время находит применение при обработке двумерных сигналов, в задачах аппроксимации, сжатии данных и сведении двумерных обратных задач к небольшому числу одномерных. Данный подход может быть применен для упаковки таблиц и данных, при решении интегральных уравнений и др.

Шмидт в работе [1] показал, что любую квадратично-интегрируемую функцию двух переменных $f(x,y)$ можно приблизить в среднем квадратичном с желаемой степенью точности с помощью конечного числа членов, каждый из которых представляет произведение функции от x на функцию от y , при этом минимум нормы погрешности такого разложения достигается на фундаментальных функциях Шмидта, соответствующих сингулярным значениям интегрального оператора с ядром $f(x,y)$.

Оптимизация этих приближений в среднем квадратичном рассматривалась для функций непрерывного или дискретного аргумента различными авторами: Е. Шмидт, 1907 [1], М.Р. Шура-Бура, 1957 [2], В.В. Пospelов, 1978 [3]. Наиболее общая постановка и вычислительный алгоритм решения даны В.А. Василенко в 1990 году [4, 5].

Пусть $X(\Omega_x)$ и $Y(\Omega_y)$ - гильбертовы функциональные пространства на областях

$\Omega_x \subset R^{n_x}$ и $\Omega_y \subset R^{n_y}$. Через Ω обозначим декартово произведение $\Omega_x \times \Omega_y$, а через $Z(\Omega)$ - гильбертово пространство функций, являющихся тензорным произведением $X(\Omega_x) \otimes Y(\Omega_y)$. Требуется найти наилучшее приближение $f(x, y) \in Z(\Omega)$ функцией вида

$$\sum_{k=1}^s \Phi^{(k)}(x) \cdot \Psi^{(k)}(y), \quad (1)$$

где $\Phi^{(k)}(x)$ и $\Psi^{(k)}(y)$ принадлежат конечномерным подпространствам $X_n(\Omega_x)$ и $Y_m(\Omega_y)$ пространств $X(\Omega_x)$ и $Y(\Omega_y)$, соответственно.

Такая задача редуцируется к некоторой нелинейной алгебраической системе, для решения которой достаточно рассмотреть обобщенную спектральную задачу для следующих матриц:

$$\begin{bmatrix} 0 & F \\ F^* & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где F - $n \times m$ - матрица из элементов

$$f_{ij} = (f(x, y), \varphi_i(x) \psi_j(y))_z, \quad (3)$$

а матрицы A и B - суть матрицы Грама базисных элементов $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(x)$ подпространств X_n и Y_m .

При этом для ошибки приближения справедливо равенство

$$E_{n,m}^s = \|f\|_z^2 - \sum_{k=1}^s \lambda_k^2. \quad (4)$$

Естественно вычислять собственные значения в порядке убывания.

Отметим, что функция $f \in X_n(\Omega_x) \otimes Y_m(\Omega_y)$ может быть восстановлена с помощью $\Sigma\Pi$ -приближения точно, количество членов приближения при этом не может превышать величины $\min\{n, m\}$.

Для данного алгоритма используются вычислительные схемы $\Sigma\Pi$ -аппроксимации на конкретных базисных функциях - непрерывных и дискретных В-сплайнах [7].

2. Реализация алгоритма на непрерывных сплайнах.

Пусть $\Omega_x = [a, b], \Omega_y = [c, d]$, и $X(\Omega_x) = H^s(a, b), Y(\Omega_y) = H^r(c, d)$ - гильбертовы функциональные пространства со скалярными произведениями

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^s(a,b)} &= \int_a^b [uv + u^{(s)} v^{(s)}] dx, \\ (u, v)_{H^r(c,d)} &= \int_c^d [uv + u^{(r)} v^{(r)}] dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Тензорное произведение $H^{s,r}(\Omega), \Omega = [a, b] \times [c, d]$ этих двух пространств будет соответствовать кросс-норме функции от двух переменных:

$$\|u(x, y)\|_{H^{s,r}(\Omega)} = \left[\int_a^b \int_c^d \left[u^2 + \left(\frac{\partial^s u}{\partial x^s} \right)^2 + \left(\frac{\partial^r u}{\partial y^r} \right)^2 + \left(\frac{\partial^{s+r} u}{\partial x^s \partial y^r} \right)^2 \right] d\Omega \right] \quad (6)$$

и соответствующему скалярному произведению. Зададим на отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$ сетки

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, c = y_1 < y_2 < \dots < y_m = d \quad (7)$$

по переменным x и y соответственно и свяжем эти сетки с конечномерными подпространствами

ствами гильбертовых пространств $X_n = S_n \subset H^s(a, b), Y_m = S_m \subset H^r(c, d)$ полиномиальных сплайнов дефекта 1 подходящей гладкости. В таких подпространствах существует базис из локальных функций (В-сплайнов) [4]. Если функция $f(x, y)$ лежит в пространстве $H^{s,r}(\Omega)$, тогда описанная $\Sigma\Pi$ -процедура может быть применена для аппроксимации $f(x, y)$ суммой произведений одномерных сплайнов. Алгоритм $\Sigma\Pi$ -аппроксимации выполняется в несколько этапов:

а) выбираются конечномерные $X_n = S_n \subset H^s(a, b), Y_m = S_m \subset H^r(c, d)$ и строятся базисные функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ для X_n и $\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_m(y)$ для Y_m , являющиеся одномерными В-сплайнами со степенями p и q . Выбранные порядки дифференцирования s, r не должны превышать степеней базисных В-сплайнов p и q ;

б) вычисляются матрицы Грама для базисных В-сплайнов [6], элементы которых определяются по формулам:

$$a_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)_{H^s(a,b)}, b_{ij} = (\psi_i, \psi_j)_{H^r(c,d)}. \quad (8)$$

Матрицы A, B симметричные и $(2p+1), (2q+1)$ – диагональные. Поэтому достаточно хранить $(p+1), (q+1)$ нижних диагоналей;

в) ленточные матрицы A и B подвергаются разложению Холецкого [6] в виде

$$A = LL^*, B = MM^*; \quad (9)$$

г) вычисляется прямоугольная $n \times m$ матрица F скалярных произведений исходной функции и базисных В-сплайнов со следующими элементами:

$$f_{ij} = (f(x, y), \varphi_i(x)\psi_j(y))_{H^{s,r}}; \quad (10)$$

д) для возможности контроля ошибки вычисляем норму $\|f\|_{H^{s,r}(\Omega)}$;

е) последовательно определяем собственные значения и собственные вектора

$$(L^{-1}FM^*{}^{-1})^*(L^{-1}FM^*{}^{-1})\omega = \lambda^2\omega \quad (11)$$

до достижения нужной точности в $\Sigma\Pi$ -аппроксимации;

ж) собственные вектора задачи определяются по формулам:

$$v^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(M^*)^{-1}\omega^{(k)}, \quad u^{(k)} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}Fv^{-1}; \quad (12)$$

з) оптимальные коэффициенты определяются по формулам:

$$\bar{\alpha}^{(k)} = \sqrt{2\lambda_k}u^{(k)}, \quad \bar{\beta}^{(k)} = \sqrt{2\lambda_k}v^{(k)}.$$

Затем выполняем процесс восстановления данных, который, в отличие от многих алгоритмов, выполняется достаточно быстро.

3. Комплект программ PRESS_NSPL.

Назначение комплекта - сжатие непрерывных кусочно-полиномиальных сплайновых зависимостей двух переменных в прямоугольной области. Исходная информация подается в виде коэффициентов разложения по В-сплайнам любой степени, вообще говоря, различной по переменным x и y . Задавая уровень точности $\varepsilon > 0$ в любой допустимой гильбертовой кросс-норме, можно получить оптимальный $\Sigma\Pi$ -аналог сплайна, содержащий, как правило, значительно меньшее число коэффициентов, чем в исходной информации. Вещественная процедура-функция, использующая вновь полученный $\Sigma\Pi$ -аналог сплайна, позволяет вычислять его значение в любой точке области, а полное представление - производить более сложные операции: дифференцирование, интегрирование и т.д.

Пример 1. Модельный расчет.

В единичном квадрате $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ с равномерной по x и y сеткой 32×32 сформируем бикубический сплайн

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{35} \sum_{j=1}^{35} b_{ij} B_i(x) B_j(y),$$

коэффициенты, которого зададим по формуле

$$b_{ij} = \sin^3 \left(10 \left(\frac{i-1}{31} \right)^2 + 10 \left(\frac{j-1}{31} \right)^2 \right).$$

Задаваясь точностью $\varepsilon = 0,01$, определим оптимальную в норме $H^{2,2}(\Omega)$ $\Sigma\Pi$ -аппроксимацию. Для достижения такой точности потребовалось только 4 собственных значения из 35. Тем самым, вместо 1225 исходных коэффициентов потребовалось только 280, и коэффициент сжатия равен 4,38. На рисунке 1 изображена аппроксимируемая поверхность, которая визуальнo не отличима от полученной $\Sigma\Pi$ -аппроксимации.

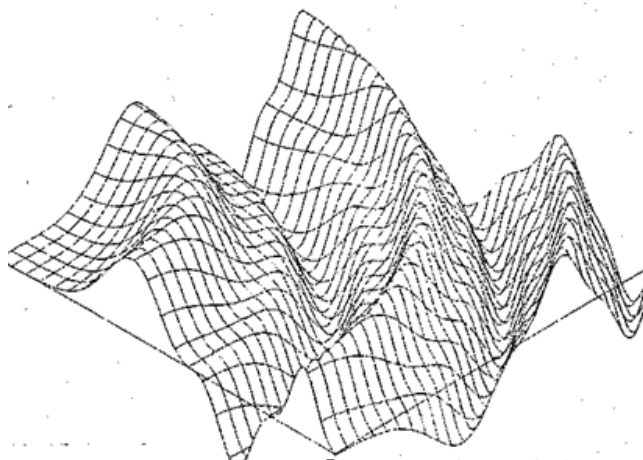


Рисунок 1 - Бикубический сплайн с коэффициентами $b_{ij} = \sin^3 \left(10 \left(\frac{i-1}{31} \right)^2 + 10 \left(\frac{j-1}{31} \right)^2 \right)$

Пример 2. Эффект сглаживания.

На этом примере мы проиллюстрируем сглаживающий эффект при применении $\Sigma\Pi$ -аппроксимаций. С точки зрения теории такой эффект при применении нелинейного $\Sigma\Pi$ -алгоритма вовсе неочевиден и теоретически не изучен. Тем не менее, в экспериментах он имеет место. На рис. 2 приведена поверхность на равномерной сетке 32×32 , полученная путем формирования бикубического сплайна со следующими коэффициентами:

$$b_{ij} = e^{\frac{i+j}{31}}.$$

С помощью датчика случайных чисел в узлах сетки была внесена ошибка порядка 20 % от измерений (рис. 3). На рис. 4 приведена поверхность $\Sigma\Pi$ -аппроксимации с одним членом. Уровень случайных ошибок уменьшился до 2 %.

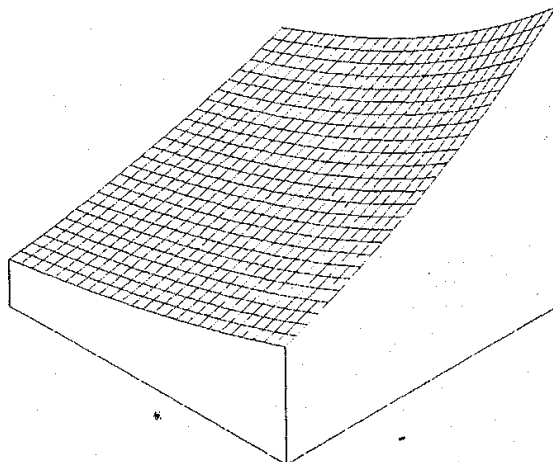


Рисунок 2 - Исходная поверхность

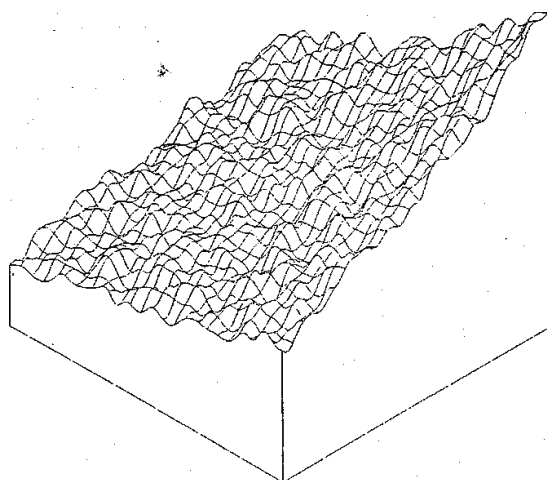
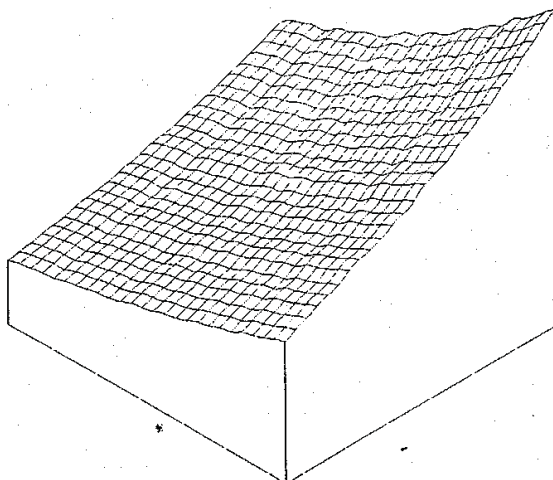


Рисунок 3 - Зашумленная поверхность

Рисунок 4 - Поверхность, обработанная с помощью $\Sigma\Pi$ -аппроксимации

Список литературы

1. Schmidt E. Zur theorie der linearen mid nichtlinearen integralglei-chungen. - Math. Ann., 1907. - 63. - P.433-476.
2. Шура-Бура М.Р. Аппроксимация многомерных функций суммой произведений одномерных функций // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. - Т.2. - 1957. - С. 13-19.
3. Поспелов В.В. Точность аппроксимации двумерных функций суммой произведений одномерных функций // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. - 1978. - Т. 18. - N 5. - С.1307-1308.
4. Василенко В.А. Наилучшие конечномерные $\Sigma\Pi$ -приближения // Численные методы и математическое моделирование.- Новосибирск, 1990. - С.25-39.
5. Vasilenko V.A., The best finite dimensional $\Sigma\Pi$ -approximation.- Sov.J. Num.Anal. Math.Mod. - 1990. - vol.5. - No.4/5. - P.435-443.
6. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. - М.: Мир, 1975. - 496 с.
7. Baklanova O.E. Data compression with $\Sigma\Pi$ -approximations based on splines /O.E. Baklanova, V.A. Vasilenko. - NCC Bulletin, series "Numerical Analysis", 1993, issue 2.- Novosibirsk NCC Publisher. - P. 11-18.

Получено 01.02.10

УДК 004.3

И.С. Баранович

ВКГТУ им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЗЕРВА НЕНАДЕЖНЫХ БЛОКОВ
ДЛЯ ПАРКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН ВКГТУ**

При эксплуатации парка вычислительной техники часть блоков имеют ограниченный ресурс времени их эксплуатации, и требуется их частичная ротация.

Анализ статистических данных по эксплуатации парка персональных компьютеров (ПК) в ВКГТУ показал, что из-за низкой надежности отдельных компонентов ПК сотрудниками информационно-технологического центра осуществляется ремонт по двум направлениям: аппаратный и программный ремонт устройств. К компьютерным проблемам, связанным с аппаратным обеспечением компьютера, относятся: ремонт, замена, модернизация, установка и настройка комплектующих (материнской платы, процессора, оперативной памяти, жесткого диска HDD, накопителя на гибких магнитных дисках FDD, оптического привода CD-ROM/DVD-ROM, видеоадаптера, звуковой карты, сетевой карты, модема); прошивка BIOS; ремонт систем охлаждения либо их замена; ремонт блока питания либо его замена. В программный ремонт входит: переустановка операционной системы, установка и настройка программного обеспечения, поиск и удаление вирусов, настройка сети и интернет, восстановление удаленной информации.

Изучив заявки, поступающие в отдел информационно-технологического центра, пришел к выводу, что значительная часть отказов связана с выходом из строя аппаратной составляющей ПК, а именно: с производственными дефектами, большими нагрузками, а также из-за несовместимости между собой отдельных устройств. Поэтому дальнейшие исследования были направлены на создание методики определения оптимального запаса необходимых расходуемых частей для замены наиболее часто выходящих из строя компьютерных компонентов.

Возникает проблема выбора оптимального резерва. Нами предложен имитационный алгоритм на примере парка ВКГТУ. Но так как имитационный метод дает доверительное решение, то для его обоснования требуется аналитический вариант в качестве опорного