

Б. З. КЕНЖЕГУЛОВ, А. Н. МЫРЗАШЕВА

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СЖИМАЮЩЕГОСЯ
УСИЛИЯ И ТЕРМОУПРУГОГО НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕРЖНЯХ ИЗ
ЖАРОПРОЧНОГО СПЛАВА**

В современных газотурбинных и реактивных двигателях, где рабочая температура изменяется от 20 до 900 °С, в качестве несущих элементов используются стержни из жаропрочных сплавов. Эти стержни ограниченной длины во многих местах конструкции являются жестко защемленными с обоих концов, для защиты от агрессивных сред их боковая поверхность является теплоизолированной. При этом предел прочности этих жаропрочных сплавов на порядок больше, чем у обычных сталей, а коэффициент теплового расширения является функцией от температуры.

Статья посвящена численному решению задачи определения величин сжимающего усилия и возникающего термоупругого напряжения в жестко защемленном с двух концов стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована по всей длине. При решении задачи применяется процедура минимизации функционала, характеризующая полную тепловую энергию по узловым значениям используемых квадратичных конечных элементов с тремя узлами.

Предположим, что дан стержень ограниченной длины ℓ [см], постоянный по длине поперечного сечения F [см²]. Оба конца стержня жестко защемленные. Материал стержня – жаропрочный сплав. В таких сплавах коэффициент теплового расширения зависит от температуры [1]. В частности, такие зависимости в виде кривых определены экспериментально и даны для нескольких видов жаропрочных сплавов в работе [1]. Эту зависимость можно привести в виде табл. 1.

Таблица 1

№ п/п	$\alpha \cdot 10^6$ для марок сплавов	Температура, °С								
		20	100	200	300	400	500	600	700	800
1	ЭИ 48	16	17,2	18,1	19,1	20,1	21,1	22,1	23,1	24,1
2	ЭИ 696	15,9	16,7	18	19,3	20,05	20,8	21,4	21,6	21,2
3	ЭИ 434	15,8	15,85	16	16,2	16,8	17,1	17,3	17,5	18
4	ЭИ 395	13,9	14,7	15,9	17	17,9	18,5	19,2	19,3	19
5	ЭИ 437Б	12,7	13,2	14,6	16,2	17,2	18,1	19,1	20,7	22,7
6	ЭИ 698	12	12,7	13,6	14,6	15,4	16,8	18	20	22,7
7	ЭИ 766	12	12,3	12,5	13,1	13,7	13,8	14	14,4	15,1
8	ЭИ 598	12,1	13	14	15,2	16,1	17,2	18,2	20,1	23,9

Кроме того, в работе [2] приводятся в виде таблиц экспериментальные данные по определению механических свойств прутьев из жаропрочного сплава НИМОНИК-100. Эти данные приводим в табл. 2.

Из табл. 1 видно, что с повышением температуры увеличивается коэффициент линейного расширения. Аналогично из табл. 2 видно, что с ростом температуры уменьшаются модуль Юнга и предел прочности материала. Следует отметить, что при $T = 20^\circ\text{C}$, предел прочности материала из жаропрочного сплава $[\sigma] = 127,1 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2} = 12710 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$, которое превышает на порядок предел прочности обычной стали.

**Таблица 2. Механические свойства прутьев из жаропрочного
сплава НИМОНИК-100**

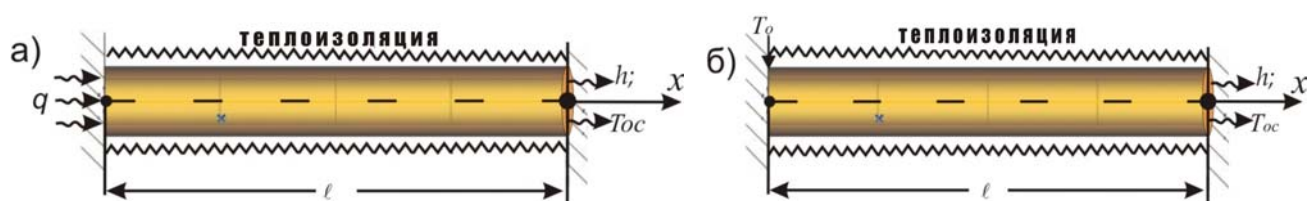
Температура	Предел текучести (кг/мм^2) при	Предел	Модуль
-------------	---	--------	--------

, °C	деформации, %:			прочности кг/мм ²	Юнга, Е·10 ⁶ кг/см ²
	0,1	0,2	0,5		
20	83	86,5	90,2	127,1	2,16
100	81,1	84,9	88,8	127,6	2,15
200	79,3	82,5	85,8	125,7	2,09
300	78,8	82,1	85,5	121,9	2,07
400	80,5	83,6	86,5	114,5	2,02
500	77,3	80,2	83,6	111,8	2
600	77	80,02	82,8	115,4	1,99
700	79,5	83	86,9	105,2	1,86
800	49	52,9	57	74	1,69
900	26,1	28,8	34,8	41,3	1,49
1000	7,9	8,5	9,6	12	1,03

Эти экспериментальные данные подтверждают, что при исследовании термонапряженного состояния стержня из жаропрочного сплава необходимо учесть, что коэффициент теплового расширения α является функцией температуры, т.е. $\alpha=\alpha(T(x))$. Поэтому коэффициент теплопроводности материала рассматриваемого стержня обозначим через $K_{xx} \left(\frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot ^\circ\text{C}} \right)$, коэффициент теплообмена с окружающей средой – $h \left(\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right)$, а температуру окружающей среды – $T_{oc} (^\circ\text{C})$. Боковую поверхность рассматриваемого стержня по всей длине считаем теплоизолированной. Задачу решим в двух разных постановках: а) на площади поперечного сечения левого конца подведен тепловой поток

$q \left(\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2} \right)$; б) на левом конце стержня температура задана, т.е. $T(x=0) = T_0 = \text{const}$.

В обоих случаях через площади поперечного сечения левого конца происходит теплообмен с окружающей средой. Необходимо в обоих случаях найти поле распределения температуры по длине стержня, величину сжимающего с обоих концов стержня усилия и термоупругого



напряжения. Расчетная схема рассматриваемых задач приводится на рис.

Расчетная схема рассматриваемой задачи

Для решения задачи, учитывая, что по всей длине боковая поверхность стержня теплоизолированная, источник тепла задается в левом конце и через правый конец теряется тепло в окружающую среду, предположим, что закон распределения по длине стержня можно описать полным полиномом второго порядка, т.е.

$$T(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (1)$$

где $\alpha, \beta, \gamma = \text{const}$ – значения, которые пока неизвестны.

Теперь, обозначая $T(x=0) = T_i$; $T\left(x = \frac{\ell}{2}\right) = T_j$ и $T(x=\ell) = T_k$, из (1) имеем [3, 4]

$$T(x) = \varphi_i(x) \cdot T_i + \varphi_j(x) \cdot T_j + \varphi_k(x) \cdot T_k, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2)$$

$$\text{где } \varphi_i(x) = \frac{\ell^2 - 3\ell x + 2x^2}{\ell^2}; \quad \varphi_j(x) = \frac{4(\ell x - x^2)}{\ell^2}; \quad \varphi_k(x) = \frac{2x^2 - \ell x}{\ell^2}. \quad (3)$$

Эти функции называются функциями формы для квадратичного конечного элемента с тремя узлами [3, 4]. Если обозначить коэффициент теплового расширения α в точках с координатами $x = 0 = x_i$; $x = \frac{\ell}{2} = x_j$; $x = \ell = x_k$ следующим образом:

$$\alpha_i = \alpha(T(x)) = \alpha(x_i); \alpha_j = \alpha(T_j); \alpha_k = \alpha(T_k), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (4)$$

тогда поле распределения $\alpha = \alpha(x)$ по длине рассматриваемого стержня с определенной точностью, т.е. с точностью аппроксимации $\alpha(x)$ полным квадратичным полиномом, можем представить в виде

$$\alpha = \varphi_i(x) \cdot \alpha_i + \varphi_j(x) \cdot \alpha_j + \varphi_k(x) \cdot \alpha_k, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (5)$$

Теперь для случая а) напомним выражение функционала, характеризующее полную тепловую энергию для рассматриваемой задачи:

$$J_1 = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_0} q T ds + \int_{S_k} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 ds, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (6)$$

Для случая б) аналогично имеем

$$J_2 = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_k} \frac{h}{2} (T - T_{oc})^2 ds, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (7)$$

Но во втором случае следует иметь в виду, что $T(x=0) = T_i = T_0$ считается заданной.

В обоих случаях в выражениях (6)–(7) V – объем стержня; S_0 – площадь поперечного сечения левого конца стержня; S_k – площадь поперечного сечения правого конца стержня.

Далее, подставляя (2) в (6) и (7), после интегрирования получаем интегрированный вид J_1 и J_2 :

$$J_1 = \frac{K_{xx} F}{6\ell} [7T_i^2 - 16T_i T_j + 2T_i T_k - 16T_j T_k + 16T_j^2 + 7T_k^2] + q F T_i + \frac{h F}{2} [T_k - T_{oc}]^2. \quad (8)$$

$$J_2 = \frac{K_{xx} F}{6\ell} [7T_i^2 - 16T_i T_j + 2T_i T_k - 16T_j T_k + 16T_j^2 + 7T_k^2] + \frac{h F}{2} [T_k - T_{oc}]^2. \quad (9)$$

Теперь, минимизируя J_1 по узловым значениям температуры T_i , T_j и T_k , получаем следующую разрешающую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial J_1}{\partial T_i} = 0; \Rightarrow 7T_i - 8T_j + T_k = -\frac{3q\ell}{K_{xx}}, \\ \frac{\partial J_2}{\partial T_j} = 0; \Rightarrow T_i - 2T_j + T_k = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial T_k} = 0; \Rightarrow T_i - 8T_j + \left(7 + \frac{3h\ell}{K_{xx}}\right) \cdot T_k = \frac{3h\ell T_{oc}}{K_{xx}}. \end{cases} \quad (10)$$

Переходим к минимизации функционала J_2 . Здесь нужно учесть, что в точке с координатой $x=0$ заранее задана температура, т.е. $T(x=0) = T_i = T_0$. Поэтому функционал J_2 будем минимизировать только по T_j и T_k . Вследствие чего для случая б) получим следующую разрешающую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2T_j - T_k = T_0, \\ 8T_j - \left(7 + \frac{3h\ell}{K_{xx}}\right) \cdot T_k = T_0 - \frac{3h\ell T_{oc}}{K_{xx}}. \end{cases} \quad (11)$$

Решая системы (10) и (11) соответственно для случаев а) и б), находим значения T_i , T_j и T_k для случая а) и T_j и T_k для случая б), потому что в случае б) $T_i=T_0$ задана. При известных T_i , T_j и T_k , пользуясь соотношением (2), строим поле распределения температуры по длине стержня. Кроме того, пользуясь найденными значениями T_i , T_j и T_k из табл. 1, определяем соответствующие значения α_i , α_j и α_k . Подставив эти значения в соотношение (5), построим функциональную связь между коэффициентом теплового расширения и температуры, т.е. $\alpha = \alpha(T(x))$. После чего, предположив, что один конец стержня свободен, находим удлинение стержня $\Delta \ell_T$ от поля распределения температуры с учетом взаимосвязи между коэффициентом теплового расширения и температуры следующим образом [5]:

$$\Delta \ell_T = \int_0^{\ell} \alpha(T(x)) \cdot T(x) dx. \quad (12)$$

Приложив сжимающую силу R на свободный конец стержня, установим величину $\Delta \ell_R$ по соответствующему закону Гука [6]:

$$\Delta \ell_R = \frac{R\ell}{EF}. \quad (13)$$

С учетом того, что рассматриваемая задача является статически неопределимой, а также оба конца стержня жестко-защемленные, то естественно

$$\Delta \ell_T + \Delta \ell_R = 0. \quad (14)$$

Тогда, пользуясь соотношениями (12) и (13), из (14) имеем

$$\frac{R\ell}{EF} + \int_0^{\ell} \alpha(T(x)) \cdot T(x) dx = 0$$

или отсюда получим выражение для определения величины сжимающего усилия

$$R = -\frac{EF}{\ell} \int_0^{\ell} \alpha(T(x)) \cdot T(x) dx. \quad (15)$$

Тогда на основании закона Гука [6] находим значения термоупругого напряжения

$$\sigma = \frac{R}{F}. \quad (16)$$

Здесь следует отметить, что знаки R и σ всегда будут отрицательными. Это указывает на то, что они имеют сжимающий характер. Кроме того, σ будет постоянной величиной в любом сечении рассматриваемого стержня, потому что площадь поперечного сечения стержня изначально является постоянной величиной.

В целях иллюстрации указанного вычислительного алгоритма и метода примем за исходные данные следующие величины:

$$\ell = 30 \text{ см}; \quad r = 1 \text{ см}; \quad F = \pi r^2;$$

$$q = -350 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}; \quad h = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C}}; \quad T_{oc} = 50^\circ\text{C}; \quad K_{xx} = 72 \frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot ^\circ\text{C}};$$

$$E = 2,16 \cdot 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}.$$

При этих исходных данных для случая а) получим $T_i = 230,83^\circ\text{C}$; $T_j = 157,92^\circ\text{C}$; $T_k = 85^\circ\text{C}$.

Тогда, пользуясь табл. 1, соответственно имеем, что

$$\alpha_i = 185 \cdot 10^{-7} \frac{1}{^\circ\text{C}}; \quad \alpha_j = 178 \cdot 10^{-7} \frac{1}{^\circ\text{C}}; \quad \alpha_k = 17 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}.$$

Согласно (2) поле распределения температуры и коэффициент теплового расширения по длине стержня имеют следующий вид:

$$\begin{cases} T(x) = 230,83 \cdot \varphi_i(x) + 157,92 \cdot \varphi_j(x) + 85 \cdot \varphi_k(x), & 0 \leq x \leq \ell, \\ \alpha(T(x)) = 185 \cdot 10^{-7} \varphi_i(x) + 178 \cdot 10^{-7} \varphi_j(x) + 17 \cdot 10^{-6} \varphi_k(x), & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases} \quad (17)$$

Далее, подставляя последние в (12), вычислим удлинение рассматриваемого стержня $\Delta \ell_T = 0,085 \text{ см}$.

Теперь рассмотрим случай б). В этом случае $T_0 = T_i = 230,83^\circ\text{C}$. Решая соответствующую разрешающую систему (11), также получаем, что $T_j = 157,92^\circ\text{C}$ и $T_k = 85^\circ\text{C}$.

Далее, как в случае а): если бы мы приняли бы значение α при $T = 20^\circ\text{C}$, т.е. $\alpha = 16 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$, и ее считали постоянной величиной, то в этом случае

удлинение стержня $\Delta \ell_{T_2}$ было бы $\Delta \ell_{T_2} = \int_0^\ell \alpha T(x) dx = \alpha \int_0^\ell T(x) dx = 0,0758 \text{ см}$.

В рассматриваемом случае, т.е. при учете зависимости между коэффициентом теплового расширения и температурой, удлинение будет на 12,1% больше, чем при $\alpha = \text{const}$. Тогда в случаях а) и б) величина сжимающегося усилия R , определяемая по (15), будет

$$R = -\frac{EF}{\ell} \cdot \Delta \ell_T = -\frac{2,16 \cdot 10^6 \cdot \pi r^2}{\ell} \cdot \Delta \ell_T = -\frac{2160000 \cdot 3,14 \cdot 0,085}{30} = -19216,8 \text{ кГ}.$$

Согласно (16) величина термоупругого напряжения будет

$\sigma = \frac{R}{F} = -\frac{E\Delta\ell_T}{\ell} = -6120 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$ и имеет сжимающий характер. Если из

табл. 2 принять за допускаемое напряжение $[\sigma] = 125 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2} = 12500 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$, то полученное напряжение почти в два раза меньше, чем допускаемое.

Но если увеличить величину подведенного теплового потока на площади поперечного сечения левого конца стержня в два раза, т.е. если принять, что $q = -700 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$, то при принятых исходных данных значения

$\Delta\ell_T$, R и σ будут больше, чем в случае $q = -350 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$, в 1,7764 раза, т.е.

$\Delta\ell_T = 0,151 \text{ см}$, $R = -34138,1 \text{ кГ}$ и $\sigma = -10872 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$. Даже в этом случае значение σ будет меньше, чем допускаемое напряжение у жаропрочного сплава, из которого изготовлен рассматриваемый стержень.

В заключение отметим, что этот вычислительный алгоритм позволяет решать класс статистически неопределимых задач для стержней из жаропрочных сплавов при наличии теплоизоляции, температуры, теплового потока и теплообмена с учетом взаимосвязи между коэффициентом теплового расширения и распределением поля температуры по длине стержня. Предлагаемый метод учитывает различные конфигурации поперечного сечения и неоднородность по длине стержня. С помощью этих вычислительных экспериментов был обнаружен физический эффект, устанавливающий взаимосвязь между коэффициентом теплового расширения и законом распределения температуры по длине стержня, и это приводит к увеличению значений сжимающих усилий и термоупругого напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Химушин Ф.Ф.* Жаропрочные стали и сплавы. 2-е переработанное и дополненное изд. М.: Металлургия, 1969. 749 с.
2. *Беттеридж У.* Жаропрочные сплавы типа Нимоник. М.: Металлургиздат, 1961. 381с.
3. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
4. *Зенкеевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541с.
5. *Писаренко Г.С.* и др. Сопротивление материалов. Киев: Вища Школа, 1973. 672 с.
6. *Тимошенко С.П., Гудьяр ДЖ.Н.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.