УДК 517.95

М.Ю. НЕМЧЕНКО

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Изучение специального класса дифференциальных уравнений порядка выше второго, весьма важно с точки зрения приложений. Многие задачи математической физики, например теория упругих пластин и оболочек, приводят к уравнениям рассматриваемого класса.

В теории краевых задач линейных дифференциальных уравнений с частными производными достаточно хорошо изучены методы приближенного решения таких задач, поскольку в большинстве случаев невозможно выписать явные формулы решений. Представление решения краевых задач дифференциальных уравнений в явной форме представляет несомненный научный интерес.

Работа посвящена построению в явной форме функции Грина задачи Дирихле в полупространстве для полигармонических уравнений в пространстве произвольной размерности.

Постановка задачи. Построить функцию Грина $G_{m,n}(x,y)$задачи Дирихле в полупространстве $R_+^n=\left\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n : x_n>0\right\}$ (n - натуральное число):

$$\Delta_x^m u(x)=f(x), \qquad \textbf{(1)}$$

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial x^i{}_n}u(x)\right|_{x_n=0}=0,\ i=0,1,...,m-1\ , \qquad \textbf{(2)}$$

где Δ - оператор Лапласа, $\delta(x)$- дельта-функция Дирака.

Существование, единственность и симметричность функции Грина $G_{m,n}(x,y)$ задачи Дирихле (1)-(2) доказаны в работе [1]. Метод конструкции функции Грина задачи Дирихле основан на разложении в ряд фундаментального решения полигармонического уравнения.

Основным результатом работы является

Теорема 1. A) В случае нечетного n и в случае четного n при $2m<n$ функция Грина задачи Дирихле (1)-(2) представима в виде:

$$G_{m,n}(x,y)=\varepsilon_{m,n}(x,y)-g^0_{m,n}(x,y)-\sum_{j=1}^{m-1} g^j_{m,n}(x,y), \tag{3}$$

где $\varepsilon_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\left|x-y\right|^{2m-n}$, $g^0_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\left|x-\bar{y}\right|^{2m-n}$,

$g^j_{m,n}(x,y)=d_{m,n}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-j+1)-n)\dfrac{(-2)^j}{j!}\left|x-\bar{y}\right|^{2(m-j)-n}x_n^j y_n^j$,

($j=1,...,m-1$), $\bar{y}=(y_1,y_2,...,-y_n)$ - точка симметричная к $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ относительно плоскости $x_n=0$.

B) В случае четного n при $2m\geq n$ функция Грина задачи Дирихле (1)-(2) представима в виде

$$G_{m,n}(x,y)=\varepsilon_{m,n}(x,y)-g^0_{m,n}(x,y)-\sum_{j=1}^{m-1} g^j_{m,n}(x,y), \tag{4}$$

где $\varepsilon_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\left|x-y\right|^{2m-n}\ln|x-y|$, $g^0_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\left|x-\bar{y}\right|^{2m-n}\ln\left|x-\bar{y}\right|$,

$$g^j_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\left|x-\bar{y}\right|^{2(m-j)-n}x_n^j y_n^j\left[\frac{(-2)^j}{j!}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-j+1)-n)\ln\left|x-\bar{y}\right|-\right.$$
$$\left.-\frac{2^{2j}}{2}\left(\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\frac{(2m-n)}{2}...\frac{(2m-n-2(j-k)+2)}{2}\right)\right],\ j=\overline{1,m-1}$$

Лемма 1.

A) В случае нечетного n и в случае четного n при $2m<n$ функции $g^j_{m,n}(x,y)=d_j\left|x-\bar{y}\right|^{2m-n-2j}x_n^j\,y_n^j$,

где $d_j=\dfrac{(-2)^j}{j!}d_{m,n}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-j+1)-n)$, ($j=0,1,...,m-1$)

являются решениями однородного полигармонического уравнения: $\Delta_x^m g^j_{m,n}(x,y)=0$.

B) В случае четного n при $2m\geq n$ функции

$$g^j_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\left|x-\bar{y}\right|^{2(m-j)-n}x_n^j y_n^j\left[\frac{(-2)^j}{j!}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-j+1)-n)\ln\left|x-\bar{y}\right|-\right.$$
$$\left.-\frac{2^{2j}}{2}\left(\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\frac{(2m-n)}{2}...\frac{(2m-n-2(j-k)+2)}{2}\right)\right],\ j=\overline{1,m-1}$$

являются решениями однородного полигармонического уравнения:

$$\Delta_x^m g_{m,n}^j(x,y)=0.$$

Доказательство пункта **A)** леммы 1 проведем методом математической индукции по m.

При $m=1$ выполняется равенство: $\Delta_x g_{1,n}^0(x,y)=\Delta_x d_{1,n}|x-\bar{y}|^{2-n}=0$ (т.к. $\bar{y}\notin R_+^n$).

Пусть при $m-1$ выполняется равенство: $\Delta_x^{m-1} g_{m-1,n}^j(x,y)=0, j=0,1,...,m-2$.

Тогда верна следующая цепочка равенств:

$$\Delta_x^m g_{m,n}^j(x,y)=\Delta_x^{m-1}\left(\Delta_x\left(d_j|x-\bar{y}|^{2m-n-2j}x_n^j y_n^j\right)\right)=$$
$$=d_j((2m-n-2j)(2m-2j)\Delta_x^{m-1}|x-\bar{y}|^{2(m-1)-n-2j}x_n^j y_n^j+$$
$$+2(2m-n-2)j\,\Delta_x\left(\Delta_x^{m-2}|x-\bar{y}|^{2(m-2)-n-2(j-1)}x_n^{j-1}y_n^{j-1}\right)+$$
$$+\ j(j-1)\,\Delta_x\left(\Delta_x^{m-2}\,|\,x-\bar{y}\,|^{2(m-2)-n-2(j-2)}\ x_n^{j-2}y_n^{j-2}\right)=0.$$

Пункт **A)** доказан.

Доказательство пункта **B)** леммы 1 проводится методом математической индукции по m аналогично доказательству пункта A).

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Как известно [4], в пространстве нечетной размерности и в пространстве четной размерности при $2m<n$ фундаментальное решение уравнения (1) задается формулой:

$$\varepsilon_{m,n}(x,y)=\frac{(-1)^m\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}-m\right)}{\Gamma(m)2^{2m}\pi^{\frac{n}{2}}}|x-y|^{2m-n}\ ,\ \ \Gamma(.)\text{ - гамма функция.}\quad (5)$$

В пространстве четной размерности при $2m\geq n$ фундаментальное решение уравнения (1) задается формулой:

$$\varepsilon_{m,n}(x,y)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(m)\Gamma\left(m-\dfrac{n}{2}+1\right)2^{2m-1}\pi^{\frac{n}{2}}}\,|x-y|^{2m-n}\ln|x-y|\ .\qquad (6)$$

Введем обозначение**:**

$$|x-y|^2=\mathrm{B}^2(x,y)=\mathrm{B}^2,\ |x-\bar{y}|^2=\mathrm{A}^2(x,y)=\mathrm{A}^2,\ 4x_n y_n=C^2(x,y)=C^2. \qquad (7)$$

Справедливо тождество

$$A^2 - B^2 = C^2 . \tag{8}$$

Так как $\dfrac{C^2}{A^2} \le 1$, то в пространстве нечетной размерности при $2m \ge n$ фундаментальное решение уравнения (1) разлагаем в бесконечный ряд:

$$\varepsilon_{m,n}(x,y) = d_{m,n}\,\mathrm{B}^{2m-n} = d_{m,n}\,\mathrm{A}^{2m-n}\left(1-\frac{C^2}{\mathrm{A}^2}\right)^{\frac{2m-n}{2}} =$$

$$= d_{m,n}\,\mathrm{A}^{2m-n}\left(1+(-1)\frac{(2m-n)}{2}\frac{C^2}{A^2}+\frac{(-1)^2}{2!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2m-n-2)}{2}\left(\frac{C^2}{A^2}\right)^2+\ldots\right.$$

$$+\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{(2m-n)}{2}\ldots\left(\frac{2m-n}{2}-m+1+1\right)\left(\frac{C^2}{A^2}\right)^{m-1}+\frac{(-1)^m}{m!}\frac{(2m-n)}{2}\ldots\left(\frac{2m-n}{2}-m+1\right)\left(\frac{C^2}{A^2}\right)^m+ \tag{9}$$

$$\left.\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\frac{(2m-n)}{2}\ldots\left(\frac{2m-n}{2}-m+1\right)\left(\frac{2m-n}{2}-m\right)\left(\frac{C^2}{A^2}\right)^{m+1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right).$$

Так как $\dfrac{C^2}{A^2} < 1$ при $x \ne y$, то в пространстве нечетной размерности при $2m < n$ и в пространстве четной размерности при $2m < n$ фундаментальное решение уравнения (1) разлагаем в бесконечный ряд (9).

Поскольку функции $g^j_{m,n}(x,y) = d_j \left| x - \bar{y} \right|^{2m-n-2j} x^j_n\, y^j_n$, где $d_j = \dfrac{(-2)^j}{j!} d_{m,n}(2m-n)(2(m-1)-n)\ldots(2(m-j+1)-n)$, $(j = 0,1,\ldots,m-1)$ являются решениями однородного полигармонического уравнения $\Delta^m_x\, g^j_{m,n}(x,y) = 0$ (Лемма 1), то функция Грина имеет вид:

$$G_{m,n}(x,y) = d_{m,n}\left| x-y \right|^{2m-n} - d_{m,n}\left| x-\bar{y}\right|^{2m-n} - \sum_{j=1}^{m-1} d_j \left| x-\bar{y}\right|^{2(m-j)-n} x^j_n y^j_n =$$

$$= d_{m,n}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(2m-n)(2(m-1)-n)\ldots(2(m-k+1)-n)}{2^k}\left| x-\bar{y}\right|^{2(m-k)-n} 2^{2k} x^k_n y^k_n . \tag{10}$$

На основании равенства (10) для функции Грина выполняются краевые условия: $\left.\dfrac{\partial^i}{\partial x^i_n} G_{m,n}(x,y)\right|_{x_n=0} = 0,\; i = 0,1,\ldots,m-1$.

Таким образом, в случае нечетного n и в случае четного n при $2m < n$ функция Грина задачи Дирихле (1)-(2) представляется в виде:

$$G_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\left[\ |x-y|^{2m-n}-|x-\bar{y}|^{2m-n}\ \right]-$$
$$-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(-2)^j}{j!}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-j+1)-n)\,d_{m,n}\,|x-\bar{y}|^{2(m-j)-n}\,x_n^j\,y_n^j. \tag{11}$$

Пункт А) теоремы доказан.

Доказательство пункта В) теоремы.

Так как $\frac{C^2}{A^2}\le 1$, то в пространстве четной размерности при $2m\ge n$ фундаментальное решение уравнения (1) разлагаем в бесконечный ряд:

$$\varepsilon_{m,n}(x,y)=d_{m,n}|x-y|^{2m-n}\ln|x-y|=d_{m,n}B^{2m-n}\ln B=d_{m,n}\left(A^2-C^2\right)^{\frac{2m-n}{2}}\left(\ln A+\ln\sqrt{1-\frac{C^2}{A^2}}\right)$$
$$=d_{m,n}A^{2m-n}\ln A+d_{m,n}A^{2(m-1)-n}C^2\left((-1)\frac{(2m-n)}{2}\ln A-\frac{1}{2}\right)+$$
$$+d_{m,n}A^{2(m-2)-n}\left(C^2\right)^2\left(\frac{(-1)^2}{2!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2m-n-2)}{2}\ln A-\frac{1}{2}\left[(-1)\frac{(2m-n)}{2}+\frac{1}{2}\right]\right)+...$$
$$...+d_{m,n}A^{2(m-i+1)-n}\left(C^2\right)^i\left[\frac{(-1)^i}{i!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2m-n-2)}{2}...\frac{(2(m-i+1)-n)}{2}\ln|x-\bar{y}|-\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{(2m-n)}{2}...\frac{(2m-n-2(i-1)+2)}{2}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^{i-2}}{(i-2)!}\frac{(2m-n)}{2}...\frac{(2m-n-2(i-1)+4)}{2}+...\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{(i-2)}\frac{(-1)^2}{2!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2m-n-2)}{2}+\frac{1}{(i-1)}(-1)\frac{(2m-n)}{2}+\frac{1}{i}\right)\right]+....$$

Поскольку функции

$$g_{m,n}^j(x,y)=d_{m,n}\,|x-\bar{y}|^{2m-n-2j}\,x_n^j\,y_n^j\times$$
$$\times\left[\frac{(-2)^j}{j!}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-j+1)-n)\ln|x-\bar{y}|-\right.$$
$$\left.-\frac{2^{2j}}{2}\left(\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2(m-1)-n)}{2}...\frac{(2m-n-2(j-k-1))}{2}\right)\right],\ (j=1,...,m-1)$$

являются решениями однородного полигармонического уравнения $\Delta_x^m g_{m,n}^j(x,y)=0$ (Лемма 1), то функция Грина имеет вид:

$$G_{m,n}(x,y)=d_{m,n}|x-y|^{2m-n}\ln|x-y|-d_{m,n}|x-\bar{y}|^{2m-n}\ln|x-\bar{y}|-$$
$$-\sum_{j=1}^{m-1}d_{m,n}\,|x-\bar{y}|^{2m-n-2j}\,x_n^j\,y_n^j\left[\frac{(-2)^j}{j!}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-j+1)-n)\ln|x-\bar{y}|-\right.$$

$$-\frac{2^{2j}}{2}\left(\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2(m-1)-n)}{2}\ldots\frac{(2m-n-2(j-k-1))}{2}\right)\Bigg]=$$

$$=\sum_{i=m}^{\infty}d_{m,n}\,|\,x-\bar{y}\,|^{2m-n-2j}\,x_n^j\,y_n^j\,\left[\frac{(-2)^j}{j!}(2m-n)(2(m-1)-n)\ldots(2(m-j+1)-n)\ln\left|x-\bar{y}\right|-\right.$$

$$\left.-\frac{2j}{2}\left(\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2(m-1)-n)}{2}\ldots\frac{(2m-n-2(j-k-1))}{2}\right)\right].\qquad(12)$$

На основании равенства (12) для функции Грина выполняются краевые условия: $\left.\frac{\partial^i}{\partial x_n^i}G_{m,n}(x,y)\right|_{x_n=0}=0,\ i=0,1,\ldots,m-1$.

Таким образом, в случае четного n при $2m\geq n$ функция Грина задачи Дирихле (1)-(2) представима в виде:

$$G_{m,n}(x,y)=d_{m,n}\,|\,x-y\,|^{\,2m-n}\ln|\,x-y\,|-d_{m,n}\,\left|\,x-\bar{y}\,\right|^{\,2m-n}\ln\left|\,x-\bar{y}\,\right|-$$

$$-\sum_{j=1}^{m-1}\ d_{m,n}\,|\,x-\bar{y}\,|^{2m-n-2j}\,x_n^j\,y_n^j\,\left[\frac{(-2)^j}{j!}(2m-n)(2(m-1)-n)\ldots(2(m-j+1)-n)\ln\left|x-\bar{y}\right|-\right.$$

$$\left.-\frac{2^{2j}}{2}\left(\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\frac{(2m-n)}{2}\frac{(2(m-1)-n)}{2}\ldots\frac{(2m-n-2(j-k-1))}{2}\right)\right].\qquad(13)$$

Теорема доказана полностью.

Утверждение. Функция Грина Задачи Дирихле (1)-(2) положительно определена при четном m и отрицательно определена при нечетном m, (m- показатель степени оператора Лапласа полигармонического уравнения).

Доказательство. Согласно теореме 1 функция Грина Задачи Дирихле (1)-(2) в случае нечетного n и в случае четного n при $2m<n$ представляется по формуле:

$$G_{m,n}(x,y)=\ d_{m,n}\,|\,x-y\,|^{2m-n}\ -d_{m,n}\,|\,x-\bar{y}\,|^{2m-n}\ -\sum_{j=1}^{m-1}d_j\,|\,x-\bar{y}\,|^{2(m-j)-n}\,x_n^j y_n^j=$$

$$=d_{m,n}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(2m-n)(2(m-1)-n)\ldots(2(m-k+1)-n)}{2^k}\left|\,x-\bar{y}\right|^{2(m-k)-n}2^{2k}x_n^k y_n^k\,.\qquad(14)$$

В правой части представления (14) вынесем общий множитель:

$$G_{m,n}(x,y) = d_{m,n}\,\frac{(-1)^m}{m!}\,\frac{(2m-n)(2(m-1)-n)\ldots(2-n)}{2^m}\,\frac{C^{2m}}{A^n}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{n}{2}+i-1\right)}{(m+1)\ldots(m+i)}\left(\frac{C^2}{A^2}\right)^i\right)=$$

$$= \frac{(-1)^m\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(m-1)!\,m!\,2^{2m}\,\pi^{\frac{n}{2}}}\,\frac{C^{2m}}{A^n}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{n}{2}+i-1\right)}{(m+1)\ldots(m+i)}\left(\frac{C^2}{A^2}\right)^i\right). \qquad (15)$$

В случае четного n при $2m \geq n$ разложим фундаментальное решение полигармонического уравнения в виде:

$$\frac{\varepsilon_{m,n}(x,y)}{d_{m,n}} = |\,x-y\,|^{2m-n}\ln|\,x-y\,| = \mathrm{B}^{2m-n}\ln\mathrm{B} = \mathrm{A}^{2m-n}\ln\mathrm{A} + \sum_{\nu=1}^{m-\frac{n}{2}}(-1)^{\nu}\binom{m-\frac{n}{2}}{\nu}C^{2\nu}\mathrm{A}^{2(m-\nu)-n}\ln\mathrm{A} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{m-\frac{n}{2}}(-1)^{\nu}\binom{m-\frac{n}{2}}{\nu}\sum_{\mu=m-\nu+1-\frac{n}{2}}^{m-\frac{n}{2}}\frac{1}{2\mu}C^{2\nu}\mathrm{A}^{2(m-\nu)-n} + (-1)^{m+1-\frac{n}{2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\nu\binom{m+\nu-\frac{n}{2}}{\nu}}C^{2(m+\nu)-n}\mathrm{A}^{-2\nu}. \quad (16)$$

На основании (16) для функции Грина имеем следующее представление:

$$G_{m,n}(x,y) = d_{m,n}\,|x-y|^{2m-n}\ln|x-y| - d_{m,n}\,|x-\bar{y}|^{2m-n}\ln|x-\bar{y}| -$$

$$-d_{m,n}\sum_{\nu=1}^{m-\frac{n}{2}}(-1)^{\nu}C^{\nu}_{m-\frac{n}{2}}\left[\ln|x-\bar{y}| + \sum_{\mu=m-\frac{n}{2}+1-\nu}^{m-\frac{n}{2}}\frac{1}{2\mu}\right]2^{2\nu}x_n^{\nu}\,y_n^{\nu}\,|x-\bar{y}|^{2(m-\nu)-n} +$$

$$+(-1)^{m-\frac{n}{2}}d_{m,n}\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{2^{2(m+\nu)-n}}{2\nu\,C_{m+\nu}^{\nu+\frac{n}{2}}}x_n^{m+\nu}\,y_n^{m+\nu}\,|x-\bar{y}|^{-2\nu-n} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m)\,\Gamma\left(m-\frac{n}{2}+1\right)2^{2m-1}\pi^{\frac{n}{2}}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^{2(m+\nu)}}{(2\nu+n)\binom{m+\nu}{\nu+\frac{n}{2}}}x_n^{m+\nu}y_n^{m+\nu}|x-\bar{y}|^{-2\nu-n}\;. \qquad (17)$$

Таким образом, в явном виде построена функция Грина задачи Дирихле в полупространстве для полигармонических уравнений в пространстве произвольной размерности, установлена знакоопределенность построенной функции Грина задачи Дирихле в полупространстве для полигармонических уравнений в пространстве произвольной размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 352с.

2. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1985. 296с.

3. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808с.

4. *Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Искакова У.А.* Структура спектра краевых задач для дифференциальных уравнений. Алматы: Препринт, 2005. 54с.

5. *Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., M.Y. Nemchenko* Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex variables and Elliptic equations. 2008. V. 53, N 2. P.177-183

6. *Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю.* Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре// Доклады академии наук РАН. 2008. Т.421, №3, с. 305-307.