УДК 621.01

Ю.М. ДРАКУНОВ

К СИНТЕЗУ ПЛОСКИХ НАПРАВЛЯЮЩИХ МЕХАНИЗМОВ

Геометрический синтез является одним из наиболее ответственных этапов проектирования механизмов, поскольку именно на этом этапе формируются основные кинематические свойства, необходимые механизму для выполнения возложенных на него функций. Плоские направляющие механизмы для различных устройств имеют большое значение, так как обеспечивают движение рабочих точек выходных звеньев по заданным траекториям. Подобные задачи возникают при проектировании механизмов петлителей текстильных и трикотажных машин, механизмов формообразующих движений для обработки различных профилей и т.д. Благодаря большому количеству варьируемых параметров, плоские направляющие механизмы способны воспроизвести на определенном участке практически любую непрерывную траекторию, что указывает на несомненные перспективы их применения в приборостроении.

Данная работа посвящена синтезу плоских направляющих механизмов, с помощью которых необходимо воспроизвести заданную траекторию движения рабочей точки звена механизма (шатунную кривую) по предписанному движению входного звена. Эта задача сводится к определению геометрических параметров открытой кинематической цепи различного типа в зависимости от сложности механизма. В общем случае задача ставится следующим образом. Пусть задан закон движения чертящей точки в виде $X_M = X_M(t_i)$; $Y_M = Y_M(t_i)$ и закон движения входного звена как плоскости хАу в форме $\varphi = \varphi(t_i)$; t_i– например время или иной параметр, $i = 1,2,\ldots,N$ номера положений.

Рассмотрим первую задачу синтеза, отслеживание заданной траектории точки М в виде двухзвенной кинематической цепи (рис.1а).

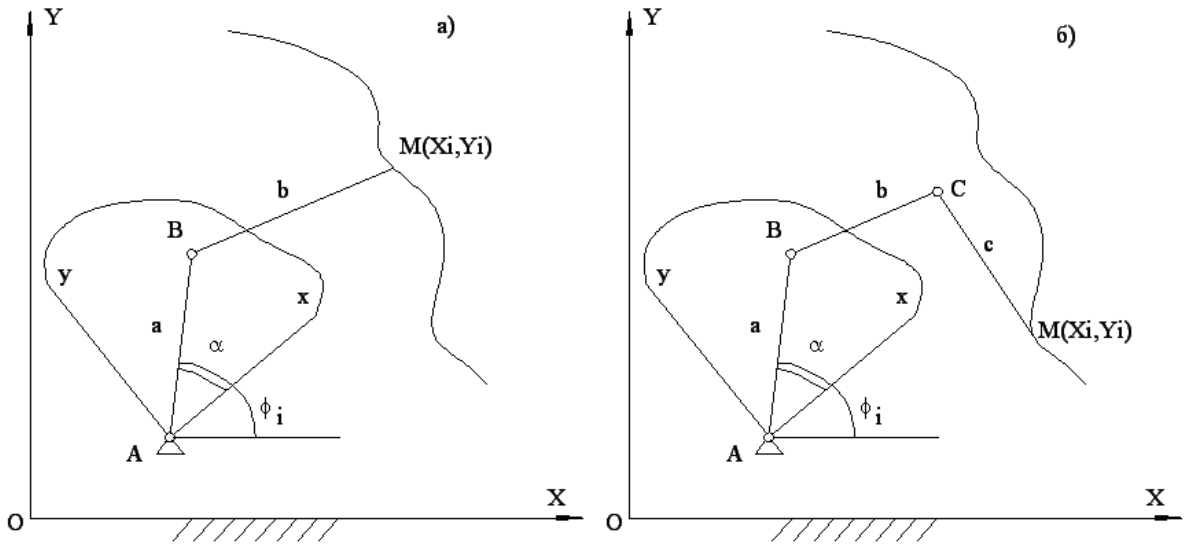

Рис.1 К синтезу механизма

Выражение взвешенной разности запишем в виде отклонения, характеризующее разность квадратов расстояния между точками B и C и постоянной величины b

$$\Delta_{q_i} = (X_{M_i} - X_{B_i})^2 + (Y_{M_i} - Y_{B_i})^2 - b^2 \qquad (1)$$

Используя формулы преобразования, координаты точки B в неподвижной системе координат XOY можно записать

$$\begin{bmatrix} X_{B_i} \\ Y_{B_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} \qquad (2)$$

В формулах (1) и (2) длина звена $BM = b$, координаты точки $B(x_B, y_B)$ в плоскости хАу ($a = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$ $tg\alpha = \frac{y_B}{x_B}$) и координаты точки $A(X_A,\ Y_A)$ оси вращения входного звена являются искомыми параметрами, число которых равно пяти. Подставим (2) в (1), получим исходное выражение взвешенной разности

$$\Delta q_i = (X_{M_i} - X_A)^2 - 2(X_{M_i} - X_A)(x_B \cos\varphi_i - y_B \sin\varphi_i) + (x_B \cos\varphi_i - y_B \sin\varphi_i)^2 + \\ +(Y_{M_i} - Y_A)^2 - 2(Y_{M_i} - Y_A)(x_B \cos\varphi_i + y_B \sin\varphi_i) + (x_B \sin\varphi_i + y_B \cos\varphi_i)^2 - b^2 \qquad (3)$$

<u>Случай 1</u>. Если считать x_B и y_B заданным, то (3) можно переписать подобно [1]

$$\Delta q_i = -2\left[X_i X_A + Y_i Y_A + H - \frac{1}{2} R_i^{\,2} \right]. \qquad (4)$$

где

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{M_i} \\ Y_{M_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} \qquad (5)$$

$$R_i^{\,2} = X_i^{\,2} + Y_i^{\,2}; \qquad H = \frac{1}{2}(b^2 - X_A^{\,2} - Y_A^{\,2})$$

(6)

Параметры x_A, y_A, b должны обратить в минимум сумму

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta q_i \qquad (7)$$

Необходимые условия минимума

$$\frac{\partial S}{\partial X_A} = 0; \ \frac{\partial S}{\partial Y_A} = 0; \ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \qquad (8)$$

При естественном допущении $b \neq 0$ преобразуются в систему трех линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} \sum X_i^{\,2} & \sum X_i Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum Y_i^2 & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum Y_i & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ H \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum R_i^{\,2} X_i \\ \sum R_i^{\,2} Y_i \\ \sum R_i^{\,2} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Решение (9) можно представить в векторной форме

$$(X_A, Y_A, H) = \frac{1}{D}(D_X, D_Y, D_H) \qquad (10)$$

Где D_X, D_Y, D_H и D соответствующие определители третьего порядка.

Длина звена b находится из выражения (6)

$$b = \sqrt{X_A^{\,2} + X_A^{\,2} + 2H} \qquad (11)$$

Случай 2. Если считать X_A и Y_A заданными, то (3) можно переписать в следующем виде

$$\Delta q_i = -2\left[\widetilde{X}_i x_B + \widetilde{Y}_i y_B + H_0 - \frac{1}{2}\widetilde{R}_i^{\,2}\right]. \qquad (12)$$

где

$$\begin{bmatrix}\widetilde{X}_i \\ \widetilde{Y}_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{M_i} - X_A \\ Y_{M_i} - Y_A\end{bmatrix} \qquad (13)$$

$$\widetilde{R}_i^{\,2} = \widetilde{X}_i^{\,2} + \widetilde{Y}_i^{\,2}; \quad H_0 = \frac{1}{2}(b_0^{\,2} - x_B^{\,2} - y_B^{\,2}) \qquad (14)$$

Необходимые условия минимума суммы S

$$\frac{\partial S}{\partial x_B} = 0;\ \frac{\partial S}{\partial y_B} = 0;\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \qquad (15)$$

Преобразуются в систему трех линейных уравнений

$$\begin{bmatrix}\sum \widetilde{X}_i^{\,2} & \sum \widetilde{X}_i\widetilde{Y}_i & \sum \widetilde{X}_i \\ \sum \widetilde{X}_i\widetilde{Y}_i & \sum \widetilde{Y}_i^{\,2} & \sum \widetilde{Y}_i \\ \sum \widetilde{X}_i & \sum \widetilde{Y}_i & N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_B \\ y_B \\ H_0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sum \widetilde{R}_i^{\,2}\widetilde{X}_i \\ \sum \widetilde{R}_i^{\,2}\widetilde{Y}_i \\ \sum \widetilde{R}_i^{\,2}\end{bmatrix} \qquad (16)$$

Решая систему (16) находим x_B, y_B, H_0 и тогда длина звена b_0

$$b_0 = \sqrt{x_B^{\,2} + y_B^{\,2} + 2H_0} \qquad (17)$$

Алгоритм решения задачи заключается в следующем:

а) задаем начальные значения x_B, y_B из рассмотрения поверхности $S = S(x_B, y_B)$.

б) Решаем систему (9) и определяем X_A, Y_A и b

в) решаем систему (16) и определяем x_B, y_B и b_0

г) проверяем условие $|b - b_0| < \varepsilon$, (ε - заданная погрешность вычисления)

д) Если это условие не выполняется, то переходим к пункту б), иначе окончание решения задачи.

Случай 3. В общем случае выражение (3) может быть записано с помощью обобщенного полинома

$$\Delta q_i = 2\left[p_0 f_0(t_i) + p_1 f_1(t_i) + ... + p_6 f_6(t_i) - F(t_i)\right] \tag{18}$$

где

$$\begin{cases} p_0 = \frac{1}{2}(x_b^2 + X_A^2 + y_b^2 + Y_A^2 - b^2); \quad p_1 = -X_A; \quad p_2 = -Y_A; \\ p_3 = -x_b; \quad p_4 = y_b; \quad p_5 = X_A x_b + Y_A y_b; \quad p_6 = Y_A x_b - X_A y_b; \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} f_0(t_i) = 1; \quad f_1(t_i) = X_{Mi}; \quad f_2(t_i) = Y_{Mi}; \\ f_3(t_i) = X_{Mi}\cos\varphi_i + Y_{Mi}\sin\varphi_i; \quad f_4(t_i) = X_{Mi}\sin\varphi_i - Y_{Mi}\cos\varphi_i; \\ f_5(t_i) = \cos\varphi_i; \quad f_6(t_i) = \sin\varphi_i; \quad F(t_i) = -\frac{1}{2}(X_{Mi}^2 + Y_{Mi}^2) \end{cases} \tag{20}$$

Коэффициенты p_i в выражении (19) связаны очевидными соотношениями

$$p_5 = p_1 p_3 - p_2 p_4; \quad p_6 = p_2 p_3 + p_1 p_4; \tag{21}$$

В случае квадратического приближения целевая функция, следуя известному методу Лагранжа имеет вид

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta q_i + \lambda_1(p_1 p_3 - p_2 p_4 - p_5) + \lambda_2(p_2 p_3 + p_1 p_4 - p_6) \tag{22}$$

Решение подобной задачи подробно рассмотрено в работе [2] и сводится, при некоторых допущениях, к решению уравнения четвертой степени относительно одного параметра, например p_1 или p_2.

$$\begin{cases} Ap_1^4 + Bp_1^3 + Cp_1^2 + Dp_1 + E = 0 \\ p_2 = -\frac{A_1 p_1^2 + C_1 p + E_1}{B_1 p_1 + D_1}; \quad p_0 = m_{00} + m_{01} p_1 + m_{02} p_2 \\ p_3 = m_{30} + m_{31} p_1 + m_{32} p_2; \quad p_4 = m_{40} + m_{41} p_1 + m_{42} p_2 \end{cases} \tag{23}$$

Здесь коэффициенты уравнений зависят от решения системы, полученной из (22) для условий относительно минимума S.

Затем определяются искомые параметры по формулам

$$\begin{cases} X_A = -p_1; \quad Y_A = -p_2; \quad x_b = -p_3; \quad y_b = p_4; \\ b = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - 2p_0} \end{cases} \tag{24}$$

Рассмотрим вторую задачу синтеза, выполнение заданной траектории точки М с помощью трехзвенной кинематической цепи (рисунок 1б). Для этого ищем круговую точку P в системе координат uMv звена CM (на рисунке эта система не показана) с центром O' и радиусом окружности R. Для этой точки можно записать выражение взвешенной разности.

$$\Delta q_i = (X_{Pi} - X_{O'})^2 + (Y_{Pi} - Y_{O'})^2 - R^2$$

(25)

Здесь

$$\begin{cases} X_{Pi} = X_{Mi} + u_P \cos\psi_i - v_P \sin\psi_i \\ Y_{Pi} = X_{Mi} + u_P \sin\psi_i + v_P \cos\psi_i \end{cases}$$

$$\sin\psi_i = (p-1)(Y_{Mi} - Y_{Bi}) + q(X_{Mi} - X_{Bi})$$
$$\cos\psi_i = (p-1)(X_{Mi} - X_{Bi}) - q(Y_{Mi} - Y_{Bi})$$

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2 - c^2}{L^2} - 2\right); \quad q = \pm\sqrt{\frac{b^2}{L^2} - p^2}; \quad L^2 = (X_{Mi} - X_{Bi})^2 + (Y_{Mi} - Y_{Bi})^2$$

$$\begin{cases} X_{Bi} = X_A + x_B \cos\varphi_i - y_B \sin\varphi_i \\ Y_{Bi} = X_A + x_B \sin\varphi_i + y_B \cos\varphi_i \end{cases}$$

В случае нескольких круговых точек получаем трехопорные механизмы третьего класса, а в случае одной круговой точки необходимо еще искать круговые точки плоскости uMv с центрами в плоскости звена BC, тогда получаем двухопорные механизмы четвертого класса, либо с центрами в плоскости xAy, после чего получаем двухопорные механизмы третьего класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саркисян Ю.Л.* Аппроксимационный синтез механизмов. – М.: Наука, 1982, 304 с.
2. *Дракунов Ю.М., Тулешев А.К., Сейдильдаева А.К.* Аппроксимационный синтез плоских рычажных механизмов по полному числу параметров.// Вестник КазГУ, серия математика, механика, информатика, №9 – Алматы, 1998. – с.191-198.

3. *Пейсах Э.Е., Нестеров В.А.* Система проектирования плоских рычажных механизмов. – М.: Машиностроение, 1988, 232с.
4. *Ремез Е.Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наукова думка, 1969, 624с.
5. Кинематика, динамика и точность механизмов: Справочник. Под ред. Г.В. Крейнина. – М.: Машиностроение, 1984. 224с.
6. *Дракунов Ю.М., Тулешов А.К.* Диалоговая система синтеза кривошипно-ползунного механизма по коэффициенту изменения средней скорости выходного звена - Материалы III международной конференции «Проблемы механики современных машин», Улан-Удэ, 2006г., с. 121-127.
7. *Дракунов Ю.М., Тулешов А.К.* Система синтеза передаточного механизма шарнирного четырехзвенника по коэффициенту изменения средней скорости коромысла. Известия НАН РК серия физ.-мат., № 5, 2006г. с.28-31.