УДК 510.67

Б. Ш. КУЛПЕШОВ

БИНАРНОСТЬ ВПОЛНЕ О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

В последние годы одним из интригующих предметов исследования в теории моделей является понятие *о-минимальности*. Вещественно замкнутые поля, полные абелевы упорядоченные группы обеспечивают важный пример о-минимальных структур. С тех пор было сделано немало подходов к обобщению данного понятия. Так, в работе [1] было введено и первоначально исследовано понятие слабой о-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур. В работе [2] введены вполне о-минимальные теории, являющиеся надклассом класса о-минимальных теорий, но наследующие многие их свойства. В настоящей статье мы представляем полное описание счетно-категоричных вполне о-минимальных теорий, из которого следует их бинарность.

Подмножество A структуры M является *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз, когда $a < c < b$, мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ – неалгебраические. Будем говорить что тип p не является *слабо ортогональным* типу q, если существуют A-определимая формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$. Будем говорить, что тип p не является *вполне ортогональным* типу q, если существует A-определимая биекция $f\colon p(M) \to q(M)$. Будем говорить, что слабо о-минимальная теория является *вполне о-минимальной*, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Пример 1. [2] Пусть $M = \langle M, <, P^1, f^1 \rangle$. Здесь P есть унарный предикат и f – унарная функция с $Dom(f) = \neg P$, $Ran(f) = P$ (поэтому формально M является 2-сортной). Универсум структуры M есть непересекающееся объединение P и $\neg P$, где $x < y$ всякий раз, когда $x \in P$ и $y \in \neg P$. Для того чтобы определить f, отождествим P с Q (где Q есть порядок рациональных чисел) и $\neg P$ с $Q \times Q$ (которое упорядочено лексикографически), и для любых $m, n \in Q$ пусть $f(m, n) = n$.

Нетрудно доказать, что $Th(M)$ – счетно-категоричная слабо о-минимальная теория. Пусть $p(x) := \{\neg P\}$, $q(x) := \{P\}$. Очевидно, что $p, q \in S_1(\varnothing)$, p не является слабо ортогональным типу q, но p вполне ортогонален типу q, т.е. $Th(M)$ не является вполне о-минимальной. Заметим что принцип замены для алгебраического замыкания не имеет места в M.

Лемма 2. Пусть T – счетно-категоричная вполне о-минимальная теория. Тогда в любой модели теории T имеет место принцип замены для алгебраического замыкания.

Определение 3. Пусть T – слабо о-минимальная теория, M – достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\phi(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in M$ – произвольная формула с одной свободной переменной. *Ранг выпуклости формулы* $\phi(x, \bar{a})$ ($RC(\phi(x, \bar{a}))$) определяется следующим образом:

1. $RC(\phi(x, \bar{a})) = -1$, если $M \models \neg\exists x\, \phi(x, \bar{a})$.
2. $RC(\phi(x, \bar{a})) \geq 0$, если $M \models \exists x\, \phi(x, \bar{a})$.
3. $RC(\phi(x, \bar{a})) \geq 1$, если $\phi(M, \bar{a})$ бесконечно.

4. $RC\phi(x, \bar{a})) \geq \alpha + 1$, если существует параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ такое, что существуют b_i, $i \in \omega$, которые удовлетворяют следующему:

для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$;

для каждого $i \in \omega$ $RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ – выпуклое подмножество множества $\phi(M, \bar{a})$;

5. $RC(\phi(x, \bar{a}) \geq \delta$, если $RC(\phi(x, \bar{a}) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x, \bar{a}) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим, что $RC(\phi(x, \bar{a})$ определяется. В противном случае [т.е. если $RC(\phi(x, \bar{a}) \geq \alpha$ для всех α], мы полагаем $RC(\phi(x, \bar{a}) = \infty$.

Рангом выпуклости 1-типа p (RC(p)) будем называть инфимум множества $\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$. В примере 1 $RC(p) = 2$, $RC(q) = 1$.

Лемма 4. Пусть T – произвольная счетно-категоричная теория, $M \models T$, $A \subset M$, A конечно, $m, n < \omega$, $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle$, $\bar{a}' = \langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_m \rangle \in M^m$, $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$, $\bar{b}' = \langle b'_1, b'_2, \ldots, b'_n \rangle \in M^n$ такие, что $tp(\bar{b}/A) = tp(\bar{b}'/A)$, $tp(\langle a_i, b_j \rangle /A) = tp(\langle a'_i, b'_j \rangle /A)$ для всех $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ и $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1} \rangle /A) = tp(\langle \bar{a}', \bar{b}'_{n-1} \rangle /A)$. Тогда если $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle /A) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle /A)$, то существует $b''_n \in M$ такой, что $tp(\langle \bar{b}_{n-1}, b_n \rangle /A) = tp(\langle \bar{b}_{n-1}, b''_n \rangle /A)$, $tp(\langle a_i, b_n \rangle /A) = tp(\langle a_i, b''_n \rangle /A)$ для всех $1 \leq i \leq m$ и $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}, b_n \rangle /A) \neq tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}, b''_n \rangle /A)$.

Лемма 5. Пусть T – счетно-категоричная вполне о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, A конечно. Тогда для любого $\bar{b} = \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle \in M^4$ с условиями $tp(\langle b_1, b_2 \rangle /A) = tp(\langle b_1, b_3 \rangle /A) = tp(\langle b_1, b_4 \rangle /A)$, $tp(\langle b_2, b_3 \rangle /A) = tp(\langle b_2, b_4 \rangle /A)$ следует, что $tp(\langle b_1, b_2, b_3 \rangle /A) = tp(\langle b_1, b_2, b_4 \rangle /A)$.

Доказательство леммы 5. Допустим противное: предположим, что существуют $b_1, b_2, b_3, b_4 \in M$, удовлетворяющие условиям леммы, но $tp(\langle b_1, b_2, b_3 \rangle /A) \neq tp(\langle b_1, b_2, b_4 \rangle /A)$. Следовательно, $tp(\langle b_1, b_3 \rangle /A \cup \{b_2\}) \neq tp(\langle b_1, b_4 \rangle /A \cup \{b_2\})$. Пусть $p_1 := tp(b_1 /A \cup \{b_2\})$, $p_2 := tp(b_3/A \cup \{b_2\})$. Если хотя бы один из этих типов является алгебраическим, то заключение леммы следует очевидным образом, противореча нашему предположению. Следовательно, типы p_1 и p_2 неалгебраические, причем p_1 не слабо ортогонален p_2. Тогда в силу вполне о-минимальности T существует $A \cup \{b_2\}$-определимая биекция $f_{b_2}: p_1(M) \to p_2(M)$. Пусть $\theta_1(x, y)$, $\theta_2(x, y)$ – A-определимые формулы, изолирующие $tp(\langle b_1, b_2\rangle /A)$, $tp(\langle b_2, b_3\rangle /A)$ соответственно. Тогда $M \models \phi(b_1, b_2)$, где $\phi(b_1, b_2) := \exists! y[\theta_1(b_1, y) \wedge \theta_2(b_2, y) \wedge f_{b_2}(b_1) = y]$. Пусть $b_2^1 \in M$ такой, что $f_{b_2}(b_1) = b_2^1$. Тогда $b_2^1 \in dcl(A \cup \{b_1, b_2\})$ и $tp(\langle b_1, b_2\rangle /A) = tp(\langle b_1, b_2^1\rangle /A)$. Следовательно, $M \models \phi(b_1, b_2^1)$, т.е. существует $b_2^2 \in M$ такой, что $f_{b_2^1}(b_1) = b_2^2$. Тогда $b_2^2 \in dcl(A \cup \{b_1, b_2^1\})$, откуда $b_2^2 \in dcl(A \cup \{b_1, b_2\})$. Продолжая таким образом, мы для каждого $n \in \omega$ найдем $b_2^{n+1} \in M$ такой, что $b_2^{n+1} = f_{b_n^2}(b_1)$, откуда $b_2^{n+1} \in dcl(A \cup \{b_1, b_2^n\})$, следовательно, $b_2^{n+1} \in dcl(A \cup \{b_1, b_2\})$. Тогда получаем, что $dcl(A \cup \{b_1, b_2\})$ бесконечно, противореча счетной категоричности T.

Лемма 6. Пусть T – счетно-категоричная вполне о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, A конечно, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ неалгебраические, p_1 слабо ортогонален p_2. Тогда для любых $a, a' \in p_1(M)$, $b_1 < b_2$, $b'_1 < b'_2 \in p_2(M)$ таких, что $tp(\langle b_1, b_2\rangle /A) = tp(\langle b'_1, b'_2\rangle /A)$, мы имеем $tp(\langle a, b_1, b_2\rangle /A) = tp(\langle a', b'_1, b'_2\rangle /A)$.

Следующий пример показывает что условие вполне о-минимальности в лемме 6 является существенным:

Пример *7.* [5] Пусть $M = \langle Q \cup W, <, E^3, P^1\rangle$ – линейно упорядоченная структура, где Q – множество рациональных чисел; W – лексикографически упорядоченное множество всех Q-последовательностей из {0, 1} с конечным числом ненулевых координат, исключая Q-последовательность, состоящую только из *0*; $P(M) = Q$, $\neg P(M) = W$ и $P(M) < \neg P(M)$. Для любого $a \in P(M)$ $E(a, y_1, y_2)$ – отношение эквивалентности на $\neg P(M)$, определяемое следующим образом: для любых $a \in P(M)$, $b_1, b_2 \in \neg P(M)$ $(a, b_1, b_2) \Leftrightarrow b_1(q) = b_2(q)$ для всех $q \leq a$, т.е. q-е координаты элементов b_1 и b_2 совпадают для всех $q \leq a$.

Рассмотрим произвольные $a \in P(M)$, $b_1 < b_2 < b'_2 \in \neg P(M)$ такие, что $E(a, b_1, b_2)$ и $\neg E(a, b_1, b'_2)$. Пусть $p'_1 := tp(a/\{b_1\})$, $p'_2 := tp(b_2/\{b_1\})$. Тогда p'_1 не слабо ортогонален p'_2, однако не существует $\{b_1\}$-определимой биекции $f: p'_1(M) \to p'_2(M)$, т.е. $Th(M)$ не является вполне о-минимальной. Пусть $p_1 := \{P(x)\}$, $p_2 := \{\neg P(x)\}$. Нетрудно понять что p_1 слабо ортогонален p_2. Рассмотрим произвольные $a, a' \in p_1(M)$, $b_1 < b_2$, $b'_1 < b'_2 \in p_2(M)$ с условиями $a < a'$, $E(a, b_1, b_2)$ и $\neg E(a', b'_1, b'_2)$. Тогда $tp(\langle a, b_1, b_2\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a', b'_1, b'_2\rangle/\emptyset)$, хотя $tp(\langle b_1, b_2\rangle/\emptyset) = tp(\langle b'_1, b'_2\rangle/\emptyset)$, т.е. лемма 6 не выполняется.

Пусть $A \subseteq B \subseteq M$, B конечно, $p_1, p_2, \ldots, p_s \in S_1(A)$ – неалгебраические. Мы говорим, что семейство 1-типов $\{p_1, \ldots, p_s\}$ является *слабо ортогональным над* B, если каждый s-кортеж $\langle a_1, \ldots, a_s\rangle \in p_1(M) \times \ldots \times p_s(M)$ удовлетворяет одному и тому же типу над B. Мы говорим, что семейство 1-типов $\{p_1, \ldots, p_s\}$ является *ортогональным над* B, если для любой последовательности $(n_1, \ldots, n_s) \in \omega^s$, для любых возрастающих кортежей $\bar{a}_1, \bar{a}'_1 \in [p_1(M)]^{n_1}, \ldots, \bar{a}_s, \bar{a}'_s \in [p_s(M)]^{n_s}$ таких, что $tp(\bar{a}_1/B) = tp(\bar{a}'_1/B), \ldots, tp(\bar{a}_s/B) = tp(\bar{a}'_s/B)$, мы имеем $tp(\langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s\rangle/B) = tp(\langle \bar{a}'_1, \ldots, \bar{a}'_s\rangle/B)$.

Лемма 8. Пусть T – счетно-категоричная вполне о-минимальная теория, $p_1, p_2, \ldots, p_m \in S_1(\emptyset)$ – неалгебраические попарно слабо ортогональные 1-типы. Тогда $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ слабо ортогонально над $\emptyset$.

Доказательство леммы 8. Будем доказывать индукцией по $m \geq 2$. Шаг $m = 2$ тривиальный. Предположим, что лемма установлена для множеств из $m-1$ 1-типов. Докажем лемму для множеств из m 1-типов. Рассмотрим произвольный кортеж $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{m-3}\rangle \in p_1(M) \times p_2(M) \times \ldots \times p_{m-3}(M)$ и пусть $M' = \langle M, a_1, a_2, \ldots, a_{m-3}\rangle$. Нетрудно понять что M' все еще остается счетнокатегоричной вполне о-минимальной структурой. Рассмотрим типы p_{m-2}, p_{m-1} и p_m. В силу индукционного предположения они имеют единственные расширения p'_{m-2}, p'_{m-1} и p'_m до типов над $\{a_1, a_2, \ldots, a_{m-3}\}$ соответственно, более того, $p_{m-2}(M) = p'_{m-2}(M)$, $p_{m-1}(M) = p'_{m-1}(M)$ и $p_m(M) = p'_m(M)$. Индукционное предположение также гарантирует, что они попарно слабо ортогональны. Для удобства обозначений переименуем p'_{m-2}, p'_{m-1} и p'_m через p_1, p_2 и p_3 соответственно и покажем, что $\{p_1, p_2, p_3\}$ слабо ортогонально над $\varnothing$, т.е. $\{p_{m-2}, p_{m-1}, p_m\}$ слабо ортогонально над $\{a_1, a_2, \ldots, a_{m-3}\}$. Тогда в силу произвольности кортежа $\{a_1, a_2, \ldots, a_{m-3}\}$ мы достигнем заключения, что $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ слабо ортогонально над $\varnothing$.

Допустим противное: предположим, что существуют $\langle a, b, c\rangle$, $\langle a', b', c'\rangle \in p_1(M) \times p_2(M) \times p_3(M)$ такие, что $tp(\langle a, b, c\rangle /\varnothing) \neq tp(\langle a', b', c'\rangle /\varnothing)$. Поскольку p_1, p_2 и p_3 попарно слабо ортогональны, то $tp\langle a, b\rangle /\varnothing) = tp(\langle a', b'\rangle /\varnothing)$, $tp(\langle a, c\rangle /\varnothing) = tp(\langle a', c'\rangle /\varnothing)$ и $tp(\langle b, c\rangle /\varnothing) = tp(\langle b', c'\rangle /\varnothing)$. В силу леммы 4 существует $c'' \in p_3(M)$ такой, что $tp(\langle a, c\rangle /\varnothing) = tp(\langle a, c''\rangle /\varnothing)$, $tp(\langle b, c\rangle /\varnothing) = tp(\langle b, c''\rangle /\varnothing)$ и $tp(\langle a, b, c\rangle /\varnothing) \neq tp(\langle a, b, c''\rangle /\varnothing)$. Пусть $q_2^a := tp(b/\{a\})$, $q_3^a := tp(c/\{a\})$. В силу попарно слабой ортогональности типов p_1, p_2 и p_3 типы q_2^a, q_3^a неалгебраические, $q_2^a(M) = p_2(M)$, $q_3^a(M) = p_3(M)$. Очевидно, что q_2^a и q_3^a не слабо ортогональны и, следовательно, в силу вполне о-минимальности T существует $\{a\}$-определимая биекция f_a: $p_2(M) \to p_3(M)$. Аналогично рассматривая типы $q_1^b := tp(a/\{b\})$, $q_3^b := tp(c/\{b\})$, мы видим, что типы q_1^b, q_3^b неалгебраические, $q_1^b(M) = p_1(M)$, $q_3^b(M) = p_3(M)$, q_1^b и q_3^b не слабо ортогональны. Следовательно, в силу вполне о-минимальности T существует $\{b\}$-определимая биекция g_b: $p_1(M) \to p_3(M)$, причем $g_b(a) = f_a(b)$. Тогда существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E'(x, y)$ и $E''(x, y)$, разбивающие $p_2(M)$ и $p_1(M)$ на бесконечное число выпуклых классов так, что f_a и g_b являются строго монотонными на $p_2(M)/E'$ и $p_1(M)/E''$ соответственно. Не умаляя общности, предположим, что g_b является строго возрастающей на $p_1(M)/E''$, и рассмотрим произвольный элемент $a_1 \in p_1(M)$ так, что $a < a_1$ и $\neg E''(a, a_1)$. Тогда $g_b(a) < g_b(a_1)$. Пусть $c_0 := g_b(a)$, $c_1 := g_b(a_1)$. Очевидно, что $c_0 \in dcl(a, b)$, $c_1 \in dcl(a_1, b)$. Так как f_a – биекция, то существует $b_1 \in p_2(M)$ такой, что $f_a(b_1) = c_1$, т.е. $g_{b_1}(a) = c_1$. Пусть $c_2 := g_{b_1}(a_1)$. Так как $b_1 \in dcl(a, c_1) \subseteq dcl(a, a_1, b)$, то $c_2 \in dcl(a_1, b_1) \subseteq dcl(a, a_1, b)$. Продолжая таким образом, мы получаем что $dcl(a, a_1, b)$ бесконечно, противореча счетной категоричности T.

Теорема 9. Пусть T – счетно-категоричная вполне о-минимальная теория, $M \models T$, $|M| = \aleph_0$. Тогда существует конечное множество $C = \{c_0, ..., c_n\} \subseteq M$ ($M \cup \{-\infty, +\infty\}$, если M не имеет первого или последнего элементов), состоящее из всех $\varnothing$-определимых элементов в M (с возможными исключениями для $-\infty$, $+\infty$), такое, что $M \models c_i < c_j$ для всех $i < j \leq n$ и для каждого $j \in \{1, ..., n\}$ либо $M \models \neg(\exists x)\, c_{j-1} < x < c_j$ либо $I_j = \{x \in M: M \models c_{j-1} < x < c_j\}$ является плотным линейным порядком без концевых точек и существуют $k_j \in \omega$ и $p_1^j, ..., p_{k_j}^j \in S_1(\varnothing)$ так, что $I_j = \bigcup_{s=1}^{k_j} p_s^j(M)$ и

(i) для каждого неалгебраического $p \in S_1(\varnothing)$ существует $n_p \in \omega$ такой, что $RC(p) = n_p$, т.е. существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1^p(x, y), ..., E_{n_{p-1}}^p(x, y)$ такие, что:

$E_{n_{p-1}}^p(x, y)$ разбивает $p(M)$ на бесконечное число $E_{n_{p-1}}^p$-классов, каждый $E_{n_{p-1}}^p$-класс выпуклый и открытый, так что индуцированный порядок на классах является плотным линейным порядком без концевых точек;

для каждого $i \in \{1, ..., n_{p-2}\}$ E_i^p разбивает каждый E_{i+1}^p-класс на бесконечное число E_i^p-классов, каждый E_i^p-класс выпуклый и открытый, так что E_i^p-подклассы каждого E_{i+1}^p-класса плотно упорядочены без концевых точек;

(ii) существует отношение эквивалентности $\varepsilon \subseteq (\{s\colon 1 \le s \le k\})^2$, где $\{p_s \mid s \le k < \omega\}$ есть произвольное перечисление всех неалгебраических 1-типов над $\varnothing$ такое, что для каждого $(i, j) \in \varepsilon$ существует единственная $\varnothing$-определимая локально монотонная биекция $f_{i,\ j}\colon p_i(M) \to p_j(M)$ так, что $RC(p_i) = RC(p_j)$, $f_{i,\ i} = id_{p_i(M)}$ и $f_{j,\ l} \cdot f_{i,j} = f_{i,l}$ для всех $(i, j), (j, l) \in \varepsilon$ так, что T допускает элиминацию кванторов до языка $\{=, <\} \cup \{c_i\colon i \le n\} \cup \{U_s(x)\colon s \le k\} \cup \{E_l^{p_s}(x, y)\colon s \le k, l \le n_{p_s}\} \cup \{f_{i,j}\colon (i, j) \in \varepsilon\}$, где $U_s(x)$ изолирует тип p_s для каждого $s \le k$.

Более того, любому упорядочению с выделенными элементами как в (i) и любым подходящим отношением эквивалентности ε как в (ii) соответствует счетно-категоричная вполне о-минимальная теория как выше.

Таким образом, что из последней теоремы следует, что счетно-категоричные вполне о-минимальные теории являются бинарными, тем самым вполне о-минимальные теории «вполне» наследуют свойство быть бинарными у о-минимальных теорий в счетно-категоричном случае. Полученные результаты могут быть применены в дальнейших исследованиях, связанных с понятием о-минимальности и его обобщениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn Ch.* Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society. 2000. V. 352. P. 5435-5483.

2. *Кулпешов Б.Ш.* Ранг выпуклости и ортогональность в слабо о-минимальных теориях // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 2003. № 227. С. 26-31.