УДК: 519.6

Ш. А. ДЖОМАРТОВА

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ СКЛАДСКИМ ПРЕДПРИЯТИЕМ

Переход к рыночным отношениям в экономике Казахстана вызвал интенсивное развитие экономической науки. Одно из направлений экономики – логистика или задачи управления запасами в данное время является одной из широко изучаемых.

Моделирование процессов управления запасами позволит, минуя дорогостоящие натурные эксперименты, наиболее экономным путем заранее оценить возможные последствия различных административно-хозяйственных решений.

Целью исследования является нахождение оптимальной стратегии по управлению количеством товаров на складе. В статье рассматривается система управления запасами (многопродуктовая модель из n - продуктов), которая описывается линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = A(t) * x + B(t) * u, \quad (1)$$

где $A(t)$ – nхn-матрица, элементы которой являются непрерывными функциями времени; $B(t)$ – nхm-матрица; $x(t)$ – n-мерный вектор состояния системы (количество товаров на складе); $u(t)$ – m-мерный вектор управления (необходимое количество товаров).

Предполагается, что известен $g(t)$ – n-мерный вектор – задающее воздействие (ожидаемый спрос на товары), которое удовлетворяет условию $g(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1]$.

Исходя из практической постановки задачи на управления $u(t)$ накладываются следующие ограничения:

$$0 \le u_i(t) \le u_{\max}^i, \quad i = \overline{1,m}, \quad t \in [t_0, t_1]. \ (2)$$

Ограничение (2) имеет вполне естественный смысл: завозимый (приобретаемый на склад) товар не может иметь отрицательного значения и имеет реальное ограничение сверху (т.е. не может быть бесконечным).
На емкость склада накладываются условия (фазовые ограничения)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(t) \le C, \quad t \in [t_0, t_1]. \ (3)$$

Любое складское помещение имеет естественное ограничение. В предлагаемой модели это ограничение характеризуется параметрами C и $a_i, i = \overline{1,n}$.

Кроме условия (3) на количество товара накладываются ограничения

$$x_i(t) \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in [t_0, t_1]. \ (4)$$

Считается известным состояние системы в начальный момент времени t_0 (начальное состояние – количество товара на складе в начальный момент времени)

$$x(t_0) = x_0. \ (5)$$

В соответствии с условиями (3) и (4) предполагается, что x_0 удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{0i} \le C \text{ и } x_0 \ge 0.$$

Желаемое состояние в конечный момент времени t_1 может быть описано как фиксированное

$$x(t_1) = x_1 \ (6)$$

или подвижное (удовлетворяющее некоторым условиям в случае, когда некоторые виды товаров являются взаимозаменяемыми и могут быть объединены в группы)

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j(t_1) \le d_i, i = \overline{1,k}\ . \ (7)$$

Для оценки качества работы системы (склада) может быть использован следующий критерий (функционал):

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[u^*(t) R_0 u(t) + (x(t) - g(t))^* R_1 (x(t) - g(t)) \right] dt\ , \ (8)$$

где R_0 – положительно-определенная mхm-матрица; R_1 – неотрицательно-определенная nхn-матрица.

Составим множество допустимых управлений:

$$U = \left\{ u \middle| 0 \le u_i(t) \le u^i_{\max}, \quad i = \overline{1,m}, \quad t \in [t_0, t_1] \right\}.$$

Это задача оптимального управления с ограничениями на управление (2), с фазовыми ограничениями (3), (4), с закрепленными концами (5), (6) или подвижными концами (5), (7). Момент времени t_1 считается заданным (фиксированным). В настоящее время решение подобных задач содержит ряд математических затруднений. Поэтому рассмотрим ряд задач оптимального управления при некоторых допущениях.

Составим функцию Гамильтона

$$\begin{aligned} &H\left(x(t), u, \psi(t), \psi_0\right) = u^*(t) R_0 u(t) + (x(t) - g(t))^* R_1 (x(t) - g(t)) + \\ &+ (A(t)x(t) + B(t)u(t))^* \psi, \end{aligned} \qquad (9)$$

и сопряженную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}(t) = -A^*(t)\psi(t) - 2R_1(x(t) - g(t)), \quad t \in [t_0, t_1]\ . \ (10)$$

Определим оптимальное управление из уравнения (2) и максимума гамильтониана (9):

$$u = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad R_0^{-1} B\psi < 0; \\ R_0^{-1} B\psi & \text{если} \quad 0 \le R_0^{-1} B\psi \le u_{\max}; \\ u_{\max} & \text{если} \quad R_0^{-1} B\psi > u_{\max}. \end{cases} \ (11)$$

1. Задача оптимального управления с закрепленным правым концом. Рассматривается задача минимизации функционала (8) при ограничениях (1), (2), (5), (6).

Теорема 1. Пусть пара $(u(t), x(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ является решением поставленной задачи. Тогда необходимо существуют вектор-функция $\psi(t), \quad t \in [t_0, t_1]$ и параметр ψ_0 такие, что:

1) $\psi_0 \le 0$, $|\psi_0| + |\psi(t)| \ne 0, \quad t \in [t_0, t_1]$

2) при этом $x(t), \psi(t), \quad t \in [t_0, t_1]$ – решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (1) и соответствующей сопряженной системы дифференциальных уравнений (10) при краевых условиях (5) и (6) и управлении (11).

Доказательство. Так как для сформулированной задачи оптимального управления выполнены все условия принципа максимума Понтрягина [1], то отсюда следует справедливость теоремы.

2. Задача оптимального управления с подвижным правым концом. Рассматривается задача минимизации функционала (8) при ограничениях (1), (2), (5), (7).

Теорема 2. Пусть пара $(u(t), x(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ является решением поставленной задачи. Тогда необходимо существуют вектор-функция $\psi(t), \quad t \in [t_0, t_1]$ и параметр ψ_0 такие, что

1) $\psi_0 \le 0$, $|\psi_0| + |\psi(t)| \ne 0, \quad t \in [t_0, t_1]$;

2) $\psi(t), \quad t \in [t_0, t_1]$ – решение сопряженной системы дифференциальных уравнений (10), удовлетворяющая условию: существуют числа $\beta_1, ..., \beta_k$ такие, что

$$\psi_i(t_1) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j c_{ji}, i = \overline{1,n}, \ \beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j(t_1) - d_i \right) = 0, \beta_i \ge 0, i = \overline{1,k};$$

3) при каждом $t \in [t_0, t_1]$ функция $H\big(x(t), u, \psi(t), \psi_0\big)$ по переменной u достигает своей верхней грани на множестве U при $u = u(t)$, т.е.

$$\sup_{u \in U} H\big(x(t), u, \psi(t), \psi_0\big) = H\big(x(t), u(t), \psi(t), \psi_0\big).$$

Доказательство. Так как для сформулированной задачи оптимального управления выполнены все условия принципа максимума Понтрягина [1], то отсюда следует справедливость теоремы.

3. Численный алгоритм решения задачи оптимального управления с закрепленными концами и фазовыми ограничениями. Для практического решения задачи оптимального управления запасами используем метод штрафных функций и градиентный метод.

Для учета ограничений (6), (7) введем функцию штрафа

$$\Phi_{1k} = M_{k1} \int_{t_0}^{t_1} \left[\max\{(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(t) - C); 0\} \right]^2 dt + M_{k2} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \big[\max\{-x_i(t); 0\} \big]^2 dt .$$

Для учета ограничений на конце траектории введем функцию штрафа

$$\Phi_{2k} = M_{k3} \sum_{i=1}^{n} \big[x(t_1) - x_1 \big]^2 .$$

Объединяя обе функции штрафа в одну, получаем

$$S_k = \Phi_{1k} + \Phi_{2k}. \quad (12)$$

В функционалах (12) $\{M_{k1}\}, \{M_{k2}\}, \{M_{k3}\}$ – некоторые заданные положительные последовательности, стремящиеся к бесконечности.

Построим новый функционал

$$J_k = J + S_k = \int_{t_0}^{t_1} \{u^*(t) R_0 u(t) + (x(t) - g(t))^* R_1 (x(t) - g(t)) +$$

$$+ M_{k1} [\max\{(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(t) - C); 0\}]^2 + M_{k2} \big[\max\{-x_i(t); 0\} \big]^2 \} dt + M_{k3} \sum_{i=1}^{n} \big[x(t_1) - x_1 \big]^2 .$$

Заменим исходную задачу следующей: для заданного k найти оптимальное управление, минимизирующее функционал J_k при ограничениях (2), (5). Полученная задача является задачей оптимального управления со свободным правым концом и ограничением на управления. Для нее составим функцию Гамильтона

$$H_k = u^*(t)R_0u(t) + (x(t)-g(t))^* R_1(x(t)-g(t)) + M_{k1}[\max\{(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i(t) - C);0\}]^2 +$$
$$+M_{k2}\left[\max\{-x_i(t);0\}\right]^2 + (A(t)x(t)+B(t)u(t))^*\psi_k .$$

Предлагается следующий алгоритм решения.

Шаг 1. Пусть $k=0$.

Шаг 2. Вычисляется оптимальное управление для *k*-ой итерации

$$u_k = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad R_0^{-1}B\psi_k < 0; \\ R_0^{-1}B\psi_k & \text{если} \quad 0 \le R_0^{-1}B\psi_k \le u_{\max}; \\ u_{\max} & \text{если} \quad R_0^{-1}B\psi_k > u_{\max}. \end{cases} \quad (13)$$

где ψ_k – решение сопряженной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}_k = -A(t)^*\psi_k - 2R_1(x_k(t)-g(t)) + 2M_{k1}[\max\{(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{ki}(t) - C);0\}] + \qquad (14)$$
$$+ M_{k2}\left[\max\{-x_{ki}(t);0\}\right]$$

с условием на конце

$$\psi_k(t_1) = 2M_{k3}\sum_{i=1}^{n}\left[x_k(t_1) - x_1)\right] \quad (15)$$

и x_k – решение исходной системы (1) при начальных условиях (5).

Шаг 3. При найденных x_k и u_k вычисляется значение функционала J_k.

Шаг 4. Если $\left|J_k - J_{k-1}\right| \le \varepsilon$, то переход к шагу 5, иначе $k = k+1$ и переход к шагу 2. (Здесь $\varepsilon > 0$ – требуемая точность вычисления.)

Шаг 5. Найденная пара (x_k, u_k) является оптимальным решением.

Эффективность предложенной процедуры проверена на модельных задачах.

В то же время постановка задачи оптимального управления предполагает, что существует хотя бы одно управление, обеспечивающее решение задачи. Поэтому актуальным становится решение следующей математической задачи управляемости: с учетом имеющихся в момент времени t_0 на складе товаров [условие (5)] достаточно ли их у поставщиков товаров [ограничение (2)], чтобы к моменту времени t_1 обеспечить их требуемое количество (6) или (7).

В последние годы развивается такое направление вычислительной математики, как интервальная, оперирующая не с числами, а с интервалами (которые позволяют учитывать погрешности задания исходных данных) [2].

Далее применим интервальную математику [3] для получения критерия удовлетворения спроса (за счет определения возможности приобретения товаров у поставщиков).

Пусть $\Phi(t,\tau)=\theta(t)*\theta^{-1}(\tau)$, где $\theta(t)$ – фундаментальная матрица решений системы однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A(t)*x.$$

Решение уравнения (1) можно представить в виде

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)Bu(\tau)\,d\tau. \ (16)$$

Введем обозначения:

$$y_1=x_1-\Phi(T,0)x_0,\ f(\tau)=\Phi(T,\tau)B.$$

Тогда в случае ограничения (6) задача управляемости сводится к существованию решения системы интегральных уравнений

$$y_1=\int_0^T f_1(\tau)u(\tau)\,d\tau, \ (17)$$

удовлетворяющего условию (2).

Заменяя управление u интервалом $\bar{v}$ и проводя интервальные вычисления по правилам [3], обозначаем

$$y_2=\int_0^T f(\tau)\bar{v}\,d\tau,$$

где y_2 – интервальный вектор.

Теорема 3. Для того чтобы система (1), (2), (6) была управляемой, необходимо и достаточно, чтобы вектор y_1 принадлежал интервальному вектору y_2.

Доказательство аналогично приведенному в [4].

Таким образом, на основе математической теории оптимального управления решена проблема оптимального заказа, предложены численный алгоритм задачи оптимального управления и критерий управляемости динамической системы с ограничением на управление.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 400 с.

2 *Шокин Ю.И.* Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 1986. 224 с.

3. *Джомартова Ш.А.* Практические» интервальные вычисления // Вестник НАН РК. 2002. №2. С. 41-46.

4. *Мазаков Т.Ж., Джомартова Ш.А., Жанабаев Е.З.* Критерий управляемости нестационарных линейных систем // Вестник МО и НАН РК. 2003. №1. С. 106-110.