

2. Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М. Статика деформируемых систем под действием статических нагрузок. Материалы межд. конф. Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий. Алматы, 2006.

3. Цейтлин А.И., Кусаинов А.А. Методы учета внутреннего трения в динамических расчетах конструкций. Алматы, 1987.

4. Рахимбекова З.М. Нелинейные стержневые системы за пределом упругости. Алматы, 2002.

5. Буганова С.Н., Отарбаев Ж.О., Божанов Е.Т. Теоретико-проектные расчеты напряженно-деформированного состояния и устойчивости выработки произвольного сечения в условиях эксплуатации // Новости передовой науки. -Т.18 Технологии. – София, 2009. - С.3-6.

6. Буганова С.Н., Отарбаев Ж.О., Божанов Е.Т. Об одной модели определения устойчивости, выпучивания и колебания тонкостенных конструкций в «новом начале», как стационарного объекта с запаздывающим аргументом // Найновите научни постижения: материали за V Межд. науч.-практ. -Т.24 Технологии. – София, 2009. - С.28-32.

Резюме

Сейсмикалық аудан арқылы сейсмикалық жүктеменің әсерінен пайдалану жағдайында құбырлы конструкцияларды мысалға ала отырып, әзірленген математикалық модель қолданысы көрсетілген.

Summary

The use of the mathematical model developed by the example of tubular structures in operation under seismic loads through the seismic area was. The method of calculation and the analysis of numerical results was demonstrated.

Ключевые слова: Model, equilibrium equation, conjugation sites, elasto-viscous medium, boundary conditions, construction, characteristic equation

КазНТУ им. К.И. Сатпаева

Поступила 5.05.11

УДК 539.3:624.044

С.Н. Буганова, Ж.О. Отарбаев, Е.Т. Божанов, А.М. Ибраимкулов

ОБ ОДНОЙ РАСЧЕТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ (Б-4), РАССМОТРЕННОЙ КАК МОДЕЛЬ ТРУБЧАТОЙ КОНСТРУКЦИИ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ИЗ УПРУГО-ВЯЗКИХ СРЕД РЫХЛЕННОЙ ЗОНЫ

Рассмотрим трубчатую конструкцию, толщиной h , равной толщине рыхленного массива, внутренним радиусом R , длиной L в условиях эксплуатации.

Условия равновесия элемента таких трубчатых конструкций приводят к следующим двум уравнениям [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} &= Q + m \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \bar{P} \end{aligned} \quad (1)$$

где M – изгибающий момент, m – моментная нагрузка, отнесенная так же как интенсивность распределенной нагрузки в плоскости zx континуума Коссера, Q – перерезывающие силы, \bar{P} – сплошная нагрузка, которая складывается из активной нагрузки q_k по формам критической деформации поперечного сечения [2]-[4]:

$$q_k = \lambda_k \frac{0,85E}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{R}{h}\right) \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \lambda_k = \left\{ \frac{8}{3}; 2; \frac{4}{3} \right\} \quad (2)$$

и реактивной нагрузки

$$P_k = \pm kw, \quad \pm \eta \frac{dw}{dx} \quad (3)$$

При этом, если за P_k возьмем модель Фойхта, то одномерное движение под действием активной силы:

$$P_k = kw + \eta \frac{dw}{dt} \quad (4)$$

если за P_k возьмем модель Максвелла, то одномерное движение под действием активной силы:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{k} \frac{dP_k}{dt} + \frac{1}{\eta} P_k, \quad W = W_k + W_c \quad (5)$$

В формулах (4-5) k – коэффициент жидкости пружины, η – коэффициент вязкости демпфера, W_k – абсолютное перемещение вязкого элемента.

Тогда уравнение равновесия под действием статических нагрузок на отдельных участках сопряжения имеет вид:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{\eta}{EJ} \frac{dw}{dx} + \frac{k}{EJ} W = \frac{q_k}{EJ} \sin \omega x, \quad \omega = \frac{m\pi}{L}, \quad m = \{1; 2; 3; \dots\} \quad (6)$$

Формула (6) представляет собой математическую модель выработки под действием статической нагрузки на отдельных участках в зависимости от отношения $\frac{h}{R}$ и $\frac{R}{h}$, которую обозначим за Б-4 (рис. 1, 2).

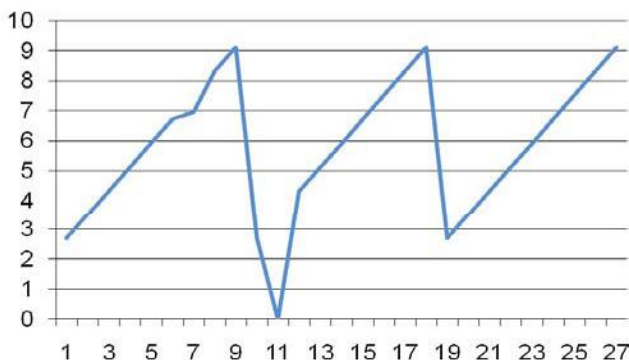


Рис. 2. Выпучивание выработки в зависимости от изменения отношения R/L

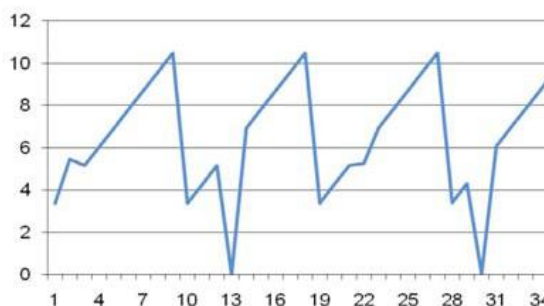


Рис.1. Выпучивание выработки в зависимости от изменения отношения h/R

Если I_{min} – наименьший радиус инерции поперечного сечения рыхленного массива и $\mu L = L_n$ приведенная длина рыхленного массива, L- длина, μ – коэффициент приведения длины, то выражение $\lambda = \frac{\mu L}{I_{min}}$ есть гибкость рыхленного массива, $\sigma_{крит} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пл}$,

$$\sigma_{пл} < \sigma_{крит} < \sigma_{т}, \quad \lambda_{пред} = 100.$$

$\sigma_{т}$ – предел текучести, $\sigma_{пл}$ – предел пластичности, $\lambda_{пред}$ – предельная гибкость, $\sigma_{пл}$ – предел пропорциональности материала.

Возможны варианты соответствия гибкости по формуле Ясинского, гиперболе Эйлера, параболе Эйлера.

В сложных сечениях, до и после места сопряжения неравномерных поперечных нагрузок, должны быть одинаковыми: линейные перемещения W ; изгибающие моменты $M = -EJ \frac{d^2 W}{dx^2}$; перерезывающие силы $Q = -EJ \frac{d^3 W}{dx^3}$.

Проведем анализ решения математической модели при граничных условиях, когда левый край свободный, а правый – скользяще-заделанный, т.е.:

$$\left. \frac{d^2 W}{dx^2} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{d^3 W}{dx^3} \right|_{x=0} = 0, \\ W(x)|_{x=L} = 0; \quad \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (7)$$

Общее решение (6) находим в виде

$$W(x) = W_0(x) + W_1(x) \quad (8)$$

где $W_0(x)$ – общее решение однородной части, $W_1(x)$ – какое-нибудь частное решение. Так как нахождения частного решения не представляет затруднений, найдем однородное решение, решая характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + \frac{\eta}{EJ} \lambda + \frac{k}{EJ} = 0 \quad (9)$$

или $\lambda^4 + a\lambda + b = 0$ $a = \frac{\eta}{EJ}$, $b = \frac{k}{EJ}$

Из постановки задачи $a > 0, b > 0$, тогда при решении уравнения (9) возможны варианты:

1. Два корня – действительные, отрицательные; два – комплексные;
2. Два корня – отрицательные, одинаковые; два – комплексные;
3. Все корни комплексные.

$$\lambda^4 + a\lambda + b = \left[\lambda^2 - A\lambda + \frac{1}{2} \left(A^2 + \frac{a}{A} \right) \right] \left[\lambda^2 + A\lambda + \frac{1}{2} \left(A^2 - \frac{a}{A} \right) \right] = 0 \quad (10)$$

$$\text{где } A^2 = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^4}{4} - \frac{64b^3}{27}}} + \sqrt{\frac{a^2}{2} - \sqrt{\frac{a^4}{4} - \frac{64b^3}{27}}} \quad (11)$$

Корни характеристического уравнения имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{1}{2} \left(A^2 + \frac{a}{A} \right)}, \quad A > 0 \quad (12)$$

$$k_{3,4} = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{a}{2A} - \frac{A^2}{4}}, \quad (13)$$

Так как $\Delta_1 = \frac{A^2}{4} - \frac{1}{2} \left(A^2 + \frac{a}{A} \right) < 0$, то $\lambda_{1,2} = \alpha_1 + \beta_1$, где $\alpha_1 = \frac{A}{2}$, $\beta_1 = \sqrt{\frac{a}{2A} - \frac{A^2}{4}}$.

Итак, два корня комплексно-сопряженные.

Для нахождения двух других корней предположим:

А) Коэффициент вязкости больше коэффициента сопротивления, т.е. $\eta \gg k$, тогда

$$\lambda_{3,4} = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{a}{2A} - \frac{A^2}{4}} < 0$$

Общее решение однородной части дифференциального уравнения (6) имеет вид: $W_0(x) = e^{\lambda_1 x} (C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x) + C_3 e^{k_3 x} + C_4 e^{k_4 x}$.

Следовательно, вместо дифференциального уравнения (6) при граничных условиях (7) можно рассмотреть дифференциальное уравнение модели Б-3:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{\eta}{EJ} \frac{dW}{dx} = \frac{q_k}{EJ} \sin \omega x, \quad (14)$$

при тех же граничных условиях с общим решением

$$W(x) = C_1 + C_2 e^{bx} + e^{\frac{b}{2}x} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx \right) + \frac{q_k}{EJ} *$$

$$* \frac{\omega^4}{1 + \frac{\eta^2}{EJ^2}} \omega^6 \left(\sin \omega x - \frac{\eta}{EJ} \omega^2 \cos \omega x \right), \quad b = \sqrt[3]{\frac{\eta}{EJ}} \quad (15)$$

В) Пусть коэффициент вязкости меньше коэффициента сопротивления, т.е. $\eta \ll k$, тогда

$$\lambda_{2,4} = \alpha_2 + \beta_2, \quad \alpha_2 = \frac{A}{2}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{2A} - \frac{A^2}{4}} > 0. \quad (16)$$

Общее решение однородной части дифференциального уравнения (6) имеет вид: $W_o(x) = e^{\alpha_2 x} (C_3 \cos \beta_2 x + C_4 \sin \beta_2 x) + e^{\alpha_1 x} (C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x)$.

Следовательно, вместо дифференциального уравнения (6) при граничных условиях (7) можно рассмотреть дифференциальное уравнение модели Б-2:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{k}{EJ} W = \frac{qk}{EJ} \sin \omega x, \quad (17)$$

при тех же граничных условиях с общим решением:

$$W(x) = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{qk}{\omega^4 + \frac{k}{EJ}},$$

$$b = \sqrt[4]{\frac{k}{EJ}} \quad (18)$$

С) Пусть коэффициент вязкости равен коэффициенту сопротивления среды, т.е. $\eta = k$, тогда

$$k_2 = k_4 = -\frac{A}{2} < 0 \quad (19)$$

Общее решение однородной части дифференциального уравнения (6) при граничных условиях (7) имеет вид:

$$W_o(x) = e^{-\frac{A}{2}x} (C_3 + C_4 x) + e^{\alpha_1 x} (C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x). \quad (20)$$

Следовательно, вместо дифференциального уравнения (6) при граничных условиях (7) можно рассмотреть дифференциальное уравнение модели Б-3:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{k}{EJ} W = \frac{qk}{EJ} \sin \omega x, \quad (21)$$

при тех же граничных условиях с общим решением:

$$W(x) = C_1 + C_2 e^{-bx} + e^{\frac{b}{2}x} (C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} bx) + \frac{qk}{D} *$$

$$* \frac{\omega^4}{1 + \frac{\eta^2}{EJ^2}} \omega^6 \left(\sin \omega x - \frac{\eta}{D} \omega^2 \cos \omega x \right), \quad b = \sqrt[3]{6(1-\nu)}, \quad \frac{qk}{D} = 10,2 \lambda_k \sqrt[4]{1-\nu^2} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \left(\frac{R}{h}\right),$$

$$\frac{\eta}{D} = 6 \frac{(1-\nu)}{h^2}, \quad \frac{qk}{\eta} = 1,7 \lambda_k \sqrt[4]{\frac{1+\nu}{(1-\nu)^2}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \left(\frac{R}{h}\right),$$

$$D = \frac{E h^2}{12(1-\nu^2)^2}, \quad \eta = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (22)$$

Таким образом, выбор математической модели упруго-вязкой выработки во многом зависит от физико-механических свойств рыхленной зоны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Божанов Е.Т., Ж.С. Ержанов. Исследование проблем устойчивости упругих тел, гибких пластин и оболочек, их приложения. Алматы, 2001.
2. Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М., Тулешева Б.А. Анализ численных результатов устойчивости выработок в толще горных пород под действием поперечных и осевых сил. Актобе, 2007.
3. Цейтлин А.И., Кусаинов А.А. Методы учета внутреннего трения в динамических расчетах конструкции. Алматы, 1987.
4. Победря Б.Е. Проблемы прочности композиционных материалов. Киев. Общ-во «Знание». 1988.

5. Рахимбекова З.М. Нелинейные стержневые системы за пределом упругости. Алматы, 2002.

6. Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М. Статика деформируемых систем под действием статических нагрузок// Материалы межд. конф. Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий. Алматы, 2006.

Резюме

Винклер және Пастернак типтегі созылмалы тұтқыр табандағы меншікті салмақ пен бірқалыпты остік қысым әсерінен тау жыныстары сілеміндегі өнім тұрақтылығы зерттелді. Жер асты өнімдерінің тұрақтылық есебі үшін ұсынылған механика-математикалық модельдің негізгі ережелері пайдаланылды.

Summary

The stability of production in the array of rocks under its own weight and a uniform axial pressure being on viscoelastic foundations such as the Winkler and Pasternak. The basic provisions of the proposed mechanical-mathematical model for calculating the stability of underground workings were used.

Ключевые слова: Model, equilibrium equation, conjugation sites, elasto-viscous medium, boundary conditions, construction, characteristic equation

КазНТУ им. К.И. Сатпаева

Поступила 5.05.11