1. *Грибковский В.П.* Полупроводниковые лазеры:уч-пос. - Мн.: Университетское, 1988. – 304 с.
2. *Numai T.* Fundamentals of semiconductor lasers. – USA.: Springer.-262 c.
3. *Звелто О.* Принципы лазеров. - Москва.: Мир, 1990. – 558 с.
4. *Agrawal G.P., Dutta N.K.* Semiconductor lasers. NewYork.: Van Nostrand Reinhold, 1993.- 629c.
5. *Strogatz S.H.* Nonlinear dynamics and chaos. - Massachusetts.: Perseus books, 1994. - 498 c.
6. *Siegman A. E.* Lasers. – Mill Valley. California.: University Science Books. – 1304 c.

Резюме

Жұмыста жартылай өткізгіш екімоддық лазер үлгісінің динамикасы зерттелген. Сапа талдау әдісімен жүйенің тұрақты күйлерінің орнықтылығы анықталған. Сандық әдістерді және Mapple программалық пакетті қолдану арқылы лазердің фазалық портреттері құрылды. Лазер модаларының қатар өмір сүру шарттары мен заңдылығы есептелген, лазердегі модалар бәсекелестігінің эффектісі сипатталған. Генерацияның шығару тәртіптері анықталған.

Summary

In the given work dynamics of nonlinear model two-mode semiconductor laser is investigated. Using method of the qualitative analysis the stability of stationary conditions of system had been defined.By the help of use of numerical methods and software package Mapple phase portraits of the laser have been received. Conditions and laws of laser modes coexistence are calculated, the effect of a mode competition is described. Regimes of generation of radiation are defined.

КазНТУ им. К.И. Сатпаева *Поступила 15.05.11*

УДК 513.83

А.М. Бренер, Н.С. Жуматаев

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА В СИСТЕМАХ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕЛОКАЛЬНОСТЬЮ

1. Введение

Проблемы расчета технологических процессов, связанные с необходимостью учета времен релаксации и “дальнодействующих” взаимодействий структурных элементов среды при математическом моделировании явлений переноса представляют большой практический и теоретический интерес [1–3]. Особенно актуальны эти вопросы в тех случаях, когда речь идет о высокоинтенсивных, быстропротекающих процессах. Рабочий цикл таких процессов короток, и весь процесс может осуществляться в переходном режиме. Поэтому возможности управления интенсивными процессами ограничены, и большое значение имеет правильный расчет и выбор оптимальных значений определяющих параметров.

В статье предлагается для обсуждения подход к выводу интегро-дифференциального уравнения переноса субстанции с отклоняющимся аргументом (пространственная нелокальность).

1. Описание пространственной нелокальности на основе интегро-дифференциального уравнения Уизема

Для описания пространственной нелокальности может быть предложено уравнение Уизема [4]. Интегро-дифференциальное уравнение Уизема является одной из моделей, эффективно описывающих нелинейные волны в сильно диспергирующих средах [4, 5]. Действительно, это уравнение содержит характерную нелинейность конвективного типа в сочетании с дисперсией произвольного вида:

$$u_t + uu_x + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - x_1) u_{x_1}(x_1, t)\, dx_1 = 0, \tag{1}$$

где нижние индексы “ x ” и “ x_1 ” означают дифференцирование по соответствующим переменным.

Далее в нашей работе обсуждаются предпосылки и условия, при которых уравнение вида (1) может интерпретироваться как уравнение переноса массы или тепла в реагирующих средах.

Введем обозначение для локального отклонения химического потенциала ν от равновесного значения:

$$\Delta\nu = u\,. \tag{2}$$

Запишем вновь нелокальную форму закона переноса в виде интегрального оператора:

$$J = \int_{\Omega} N(\eta;u)\nabla u(x_1,t)dx_1\,, \tag{3}$$

где N - ядро интегрального оператора (3), $\eta = x - x_1$.

Интегрируя по частям, получаем:

$$J = \int_{\Omega} N(\eta;u)\nabla u(x_1,t)dx_1 = \left(uN(\eta;u)\right)\big|_{\Gamma} + \int_{\Omega} u\frac{\partial N(\eta;u)}{\partial\eta}dx_1\,, \tag{4}$$

где Ω, Γ - соответственно область интегрирования и граница этой области.

Будем далее рассматривать решения, соответствующие быстрому убыванию пространственной нелокальности:

$$\lim_{|\eta|\to\infty} N(\eta;u) = 0\,. \tag{5}$$

Обозначим ядро интегрального оператора в формуле (4) $G(\eta;u) = \dfrac{\partial N(\eta;u)}{\partial\eta}$ и разложим его в ряд Тейлора в окрестности равновесных потенциалов:

$$G(\eta;u) = \sum_k G_{(k)}(\eta)u^k\,. \tag{6}$$

Используя вновь закон сохранения и, принимая во внимание (5), (6), получаем:

$$u_t + \nabla\cdot\int_{\Omega}\left(\sum_k G_{(k)}(\eta)u^{k+1}\right)dx_1 = I\,, \tag{7}$$

где I - источник массы в системе.

Предположим, что операторы дифференцирования и свертки в (7) коммутируют, что выполняется во многих случаях [5]. Ниже это предположение будет обосновано для полученного решения.

Тогда (7) можно переписать в виде:

$$u_t + \int_{\Omega}\sum_k (k+1)G_{(k)}(\eta)u^k u_{x_1}dx_1 = I\,. \tag{8}$$

Исключение членов третьего и более порядков малости дает:

$$u_t + \int_{\Omega} G_{(0)}(\eta)u_{x_1}ds + 2\int_{\Omega} G_{(1)}(\eta)uu_{x_1}dx_1 = I\,. \tag{9}$$

Для моделирования ядер $G_{(k)}$ мы используем уравнения вида:

$$\frac{d}{d\eta}G_{(k)}(\eta) + Z_{(k)}G_{(k)}(\eta) = 0\,, \tag{10}$$

Простейшая эвристическая форма коэффициентов $Z_{(k)}(\eta)$ с учетом быстрого убывания пространственной нелокальности:

$$Z_{(k)} = \frac{\lambda_{(k)}}{r_{(k)}}\,, \tag{11}$$

где $r_{(k)}$ - пространственная шкала k- го порядка, $\lambda_{(k)} = O(1)$ - некоторые коффициенты.

Тогда для изотропной среды из (10) получаем решение в виде:

$$G_{(k)} = G^0_{(k)}\exp\left(-\frac{\lambda_{(k)}}{r_{(k)}}|\eta|\right)\,. \tag{12}$$

Коммутируемость операторов свертки и дифференцирования для ядер вида (12) легко проверяется непосредственным вычислением.

Предположим далее, что пространственные шкалы образуют убывающий ряд по k. Такое предположение согласуется со слабонелинейным приближением. При быстром убывании $r_{(k)}$ с ростом k положим:

$$\int_{\Omega} G_{(1)}(\eta)uu_{x_1}dx_1 \approx \chi\int_{\Omega} G_{(1)}^0\delta(x-x_1)uu_{x_1}dx_1 = \chi G_{(1)}^0 uu_x, \tag{13}$$

где χ - нормализующий коэффициент.

Теперь уравнение переноса приобретает вид обобщенного уравнения Уизема:

$$u_t + 2\chi G_{(1)}^0 uu_x + \int_{\Omega} G_{(0)}(x-s)u_s ds = I. \tag{14}$$

Заменяя пространственную переменную $\varsigma = \dfrac{x}{2\chi G_{(1)}^0}$, получаем:

$$u_t + uu_\varsigma + \int_{\Omega} G_{(0)}(\varsigma - x_1)u_{x_1}dx_1 = I, \tag{15}$$

где обозначение $G_{(0)}(\varsigma - x_1)$ сохранено для преобразованного ядра уравнения (14). Очевидно, что вид ядер при подобной замене координат принципиально не изменится.

При $I = 0$ уравнение (15) приобретает известный вид уравнения Уизема [2].

Уравнение (15) с ядрами вида (12) можно преобразовать к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

Для этого будем искать решения уравнения (15) в виде асимптотического ряда:

$$u = u_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j u_j, \tag{16}$$

где член нулевого порядка имеет форму уединенной бегущей волны:

$$u_0 = u_0(\varsigma - ct). \tag{17}$$

При $I = O(\varepsilon)$ после интегрирования (15) по $\xi = \varsigma - ct$ в нулевом порядке получаем:

$$cu_0 - \frac{1}{2}u_0^2 + const = \int_{\Omega} G_{(0)}(\varsigma - x_1)u_0 dx_1. \tag{18}$$

Для осуществления дальнейших выкладок и корректного дифференцирования по параметру ς перепишем интегральный оператор в виде:

$$\int_{\Omega} G_{(0)}(\varsigma - x_1)u_0 ds = G_{(0)}^0\left[\int_{-\infty}^{\varsigma}\exp\left(-\frac{\lambda_{(0)}}{r_{(0)}}(\varsigma - x_1)\right)u_0 dx_1 + \right.$$
$$\left. + \int_{\varsigma}^{\infty}\exp\left(-\frac{\lambda_{(0)}}{r_{(0)}}(x_1 - \varsigma)\right)u_0 dx_1\right]. \tag{19}$$

Теперь легко доказать соотношение:

$$\left(\frac{d^2}{d\varsigma^2} - \frac{\lambda_{(0)}^2}{r_{(0)}^2}\right)\int_{\Omega} G_{(0)}(\varsigma - x_1)u_0 dx_1 = -2G_{(0)}^0\frac{\lambda_{(0)}}{r_{(0)}}u_0. \tag{20}$$

Полагая в уравнении (18) постоянную интегрирования равной нулю и, используя соотношение (20), приходим после ряда несложных преобразований к обыкновенному дифференциальному уравнению (нижний индекс «ξ» в (70) и (72) обозначает дифференцирование по ξ):

$$(c-u_0)^2 u_{0\xi}^2 = \frac{\lambda_{(0)}u_0^2}{r_{(0)}}\left[\frac{\lambda_{(0)}u_0^2}{8r_{(0)}} + \left(\frac{2G_{(0)}^0}{3} - \frac{c\lambda_{(0)}}{2r_{(0)}}\right)u_0 + c\left(\frac{c\lambda_{(0)}}{2r_{(0)}} - G_{(0)}^0\right)\right]. \tag{21}$$

Если фазовая скорость c удовлетворяет неравенству

$$c < c^*, \quad \text{где} \quad c^* = \frac{8}{3} G^0_{(0)} \left(\frac{\lambda_{(0)}}{r_{(0)}} \right)^{-1}, \tag{22}$$

то в результате разложения на множители выражения в правой части (21) получаем:

$$u^2_{0\xi} = \frac{\lambda^2_{(0)}}{8r^2_{(0)}} u_0^2 \frac{(u_0 - u_{01})(u_0 - u_{02})}{(u_0 - c)^2}, \tag{23}$$

где

$$u_{01;02} = 2c - c^* \pm \sqrt{c^*(c^* - c)}. \tag{24}$$

Петля на фазовом портрете данной динамической системы соответствует решению типа уединенной бегущей волны, способной распространяться на большие расстояния с малым изменением профиля.

Амплитуда такой волны достигает максимального значения при фазовой скорости, удовлетворяющей соотношению

$$c = c^*. \tag{25}$$

При фазовой скорости, превышающей критическое значение (22), наблюдается явление опрокидывания волны. Более детальный анализ свойств решений уравнения Уизема и их интерпретацию можно найти в книге [5].

Для последующих приближений u_j в разложении (21) получаем рекуррентную последовательность линейных неоднородных уравнений. Решения этих уравнений не могут внести существенные искажения в профиль нулевого приближения. Можно показать, что отмеченные искажения проявляются в виде «ряби» на профиле основной волны [5]. Однако, сказанное справедливо только в рамках слабонелинейного приближения.

Таким образом, показано, что модифицированное уравнение Уизема может играть роль уравнения переноса в физико-химических системах при некоторых предположениях, сформулированных выше. Возможно, наиболее сильное и, в то же время, спорное из этих предположений заключается в том, что пространственные шкалы разных порядков образуют убывающий ряд по порядку - k. Остается открытым вопрос, насколько это предположение существенно для вывода уравнения Уизема. С другой стороны, интересно выяснить общий вид ядер интегрального оператора в уравнении Уизема, при которых оно может быть сведено к обыкновенному дифференциальному уравнению с автомодельной переменной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рудяк В.Ю.* Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях.- Наука: Новосибирск, 1987, 272 с.
2. *D. Jou, J.* Casas-Vázquez, M. Criado-Sancho. Thermodynamics of Fluids Under Flow. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 2001, p. 231.
3. *Климонтович Ю.Л.,* Статистическая теория неравновесных процессов в плазме.- МГУ.: М. 1964.
4. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
5. *Габов С.А.,* Введение в теорию нелинейных волн. - МГУ.: М. 1988.

Резюме

Мақалада ұзақ әсер етуші күштер жүйесіндегі жылу және масса алмасу процестерін сипаттау үшін қолданылатын интегра-дифференциалдық теңдеулердің қорытындысы туралы баяндалады.

Summary

Article contains conclusion of integro-differential equation, which can be used to describe heat and mass transfer processes in systems with long-ranged forces and structure formation

ЮКГУ

Поступила 10.05.11

УДК 66.011:621.039.514:547.992.2