УДК 372.514:515.1

***Уланов Б.В.*** *- к.ф.-м.н., доцент,*
*ЗКГУ им. М.Утемисова*

# ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ ЭЛЕКТИВНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ «ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ»

В современных условиях основной задачей высшей школы является подготовка компетентных бакалавров, являющихся носителями компетенций, достаточных для их успешной работы в соответствующих областях профессиональной деятельности. Для выпускников по специальности 5В010900-Математика необходимо овладение математическими теоретико-практическими конструкциями (понятиями, методами, теориями), применимыми для модельного описания явлений и процессов реального мира и исследования задач, связанных с изучением этих явлений и процессов. Математические модели динамических процессов, наблюдаемых и изучаемых в различных областях человеческой деятельности (в физике, химии, биологии, экономике и т.д.), строятся с использованием понятия фазового пространства, обозначающего множество, элементами (точками) которого являются состояния процесса. Что собой может представлять математически фазовое пространство того или другого динамического процесса? Фазовым пространством математически является множество, называемое многообразием. Понятие многообразия относится к геометрическим понятиям [1], но широко применяется во всех разделах математики (анализе, алгебре, дифференциальных уравнениях и т.д.). Понятие многообразия, являющегося специальным видом множества, столь же фундаментально, как и основополагающие для математики понятия самого множества и функции. Оно играет в математике столь же существенную роль, что и понятия группы, линейного пространства. В силу сказанного автор разработал учебную рабочую программу элективной дисциплины «Дополнительные главы дифференциальной геометрии и топологии», в рамках которой изучаются фундаментальные свойства многообразий, и внедрил ее в учебный процесс для студентов по специальности 5В010900-Математика.

Цель настоящей статьи состоит в обсуждении вопросов методики введения понятия многообразия и классов многообразий, а также вопросов методики изучения свойств многообразий. Актуальность обсуждения методики преподавания названных выше вопросов, по мнению автора, состоит в том, что в современной учебной и монографической литературе [2-4] в основном излагаются факты и содержательный материал, но нет мотиваций введения и изучения соответствующих математических понятий и конструкций и методически удобной последовательности изучения соответствующих глав теории многообразий и приложений этой теории. Отметим, что мы называем элективную дисциплину «Дополнительные главы дифференциальной геометрии и топологии», а не как (в связи с содержанием дисциплины), например, «Теория и приложения многообразий» или как-то иначе, выделяя и подчеркивая тот факт, что зарождение понятия многообразия связано с историей развития дифференциальной геометрии и топологии, относится, как уже было сказано выше, к геометрии, включающей как свой раздел дифференциальную геометрию и топологию, так что понятие многообразия имеет геометрическое происхождение и теория многообразий и их приложения – это главы дифференциальной геометрии и топологии.

Цели разработанного автором курса элективной дисциплины:

1. Ознакомить студентов с современными методами теории многообразий.

2. Выработать умения и навыки студентов применять различные методы теории многообразий для решения задач в различных областях математики, естествознания и техники.

Задачи курса:

1) Изучить и освоить основные понятия и факты теории многообразий.

2) Уметь применять различные методы теории многообразий для решения задач в различных областях математики, естествознания и техники.

3) Развить математическую культуру.

4) Выработать вычислительные навыки.

Пререквизиты дисциплины:

Изучение данного курса предполагает знание обязательных предметов вузовского образования:

1. математический анализ (1-2 курсы обучения);
2. алгебра и теория чисел (1-2 курсы обучения);
3. аналитическая геометрия (1-й курс обучения).

Постреквизиты дисциплины:

Изучение курса дает знание вопросов:

1. Многообразие.
2. Связность и размерность многообразия.
3. Компактные многообразия.
4. Группы преобразований как многообразия.
5. Проективные пространства.
6. Классификация компактных двумерных многообразий.

Перейдем к обсуждению особенностей преподавания обозначенных выше вопросов.

В силу кажущейся (при первом ознакомлении с дисциплиной) громоздкости и сложности аналитического определения многообразия с методической точки зрения представляется, на наш взгляд, оправданным в начале курса перед определением многообразия привести примеры множеств, которые будут в дальнейшем являться многообразиями (прямая, плоскость, трехмерное пространство, любое открытое множество в конечномерном пространстве, окружность, сфера, тор, проективная прямая, проективная плоскость, проективное пространство), без доказательств того, что эти множества являются многообразиями. Затем, естественно, в курсе дисциплины даются определения карты, согласованности карт, атласа, локальных координат, функций перехода, условия счетности и отделимости, определение эквивалентности атласов, структуры многообразия. Только что названные определения приводят к основным определениям курса – определениям дифференцируемого (или гладкого) многообразия, топологического многообразия, аналитического многообразия, то есть мы вводим и выделяем различные классы многообразий.

Завершив формулирование аналитического определения многообразия, мы считаем, что необходимо привести примеры дифференцируемых многообразий, возникающих в конкретных задачах. И опять-таки, подробные доказательства того, что рассматриваемые множества являются многообразиями, мы оставляем на будущее в соответствующих темах курса. Оказывается, что в механике и в других разделах физики, и в других областях науки изучаются конечномерные детерминированные дифференцируемые эволюционные процессы, фазовые пространства которых суть дифференцируемые многообразия, являющиеся касательными расслоениями (определение касательного расслоения к многообразию и доказательство того, что касательное расслоение – дифференцируемое многообразие, мы предлагаем предпослать тем примерам конфигурационных пространств, о которых мы скажем ниже) к конфигурационному пространству процесса (пространству положений системы). Конфигурационные пространства являются в свою очередь также дифференцируемыми многообразиями, примеры которых из конкретных задач мы и рассматриваем: например, конфигурационное пространство плоского маятника (в этом случае конфигурационным пространством является окружность), плоского двойного маятника (конфигурационное пространство – прямое произведение окружности на окружность, а это – двумерный тор), сферического маятника (конфигурационное пространство – двумерная сфера), сферического двойного маятника (конфигурационное пространство – прямое произведение двумерной сферы на двумерную сферу ); конфигурационное пространство бусинки, вращающейся по окружности в вертикальной плоскости, когда окружность вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр окружности (в качестве конфигурационного пространства имеем окружность); конфигурационное пространство системы из двух материальных точек, соединенных отрезком в плоскости, – прямое произведение плоскости на окружность; конфигурационное пространство твердого тела – прямое произведение трехмерного евклидова пространства на группу вращений трехмерного евклидова пространства; конфигурационное пространство твердого тела с закрепленной точкой – группа вращений трехмерного евклидова пространства.

Затем мы переходим к обоснованным (с доказательствами) примерам многообразий, строя конкретные атласы, то есть задавая на конкретных множествах структуру многообразия. Более подробно мы показываем, что $n$-мерное пространство и область $n$-мерного пространства – дифференцируемые многообразия; определяем стандартную структуру дифференцируемого многообразия в $n$-мерном пространстве и в области $n$-мерного пространства и показываем, что можно задать нестандартную структуру дифференцируемого многообразия в $n$-мерном пространстве и в области $n$-мерного пространства; показываем, что окружность – дифференцируемое многообразие, строя атлас на на окружности из двух карт с угловыми координатами; также строим атлас на окружности из четырех карт с помощью ортогональной проекции; кроме того, строим атлас на окружности из двух карт с помощью стереографической проекции; показываем, что эти три построенных на окружности атласа задают одну и ту же структуру дифференцируемого многообразия на окружности; показываем, что сфера – дифференцируемое многообразие, строя атлас на сфере из шести карт с помощью ортогональной проекции; затем строим на сфере атлас из двух карт с помощью стереографической проекции; показываем, что эти два построенных на сфере атласа задают одну и ту же структуру дифференцируемого многообразия; показываем, что $n$-мерная сфера – дифференцируемое многообразие, строя атлас на $n$-мерной сфере из $2n$+2 карт с помощью ортогональной проекции; затем строим атлас на $n$-мерной сфере из двух карт с помощью стереографической проекции; показываем, что эти два атласа на $n$-мерной сфере дают одну и ту же структуру дифференцируемого многообразия; показываем с помощью теоремы о неявной функции, что поверхности в евклидовом пространстве – многообразия, разъясняя, как с помощью теоремы о неявной функции строится атлас на поверхности в евклидовом пространстве. В предлагаемом курсе показывается, что группы преобразований – дифференцируемые многообразия; рассматриваем различные примеры групп преобразований евклидова пространства и строим атласы на этих группах преобразований. Далее в курсе дисциплины рассматриваются следующие главы теории многообразий: определяем и изучаем связные многообразия (а также размерность многообразия); определяем и изучаем компактные многообразия; изучаем ориентируемые и неориентируемые многообразия; определяем и изучаем многообразия с краем; изучаем классификацию ориентируемых связных компактных двумерных многообразий и классификацию ориентируемых связных компактных двумерных многообразий с краем, а также классификацию неориентируемых связных компактных двумерных многообразий и многообразий с краем.

Так как для классификации двумерных многообразий необходимо использовать понятие диффеоморфности многообразий, то, естественно, этой классификации предпослать определение диффеоморфизма одного многообразия на другое и определение диффеоморфности многообразий.

Отметим, что для определения компактного многообразия мы предпочитаем сначала определить понятие открытого множества на многообразии и затем, пользуясь понятием открытого множества, определяем компактность многообразия как возможность выбора конечного подпокрытия из любого покрытия многообразия открытыми множествами, так что мы не предполагаем с самого начала, что многообразие – множество, являющееся топологическим пространством, как это часто предполагается в учебной литературе.

Важными в математике примерами дифференцируемых многообразий являются проективные пространства, которым посвящаем отдельную главу. По отдельности мы рассматриваем проективные пространства различных размерностей: проективную прямую, проективную плоскость, проективное пространство (как трехмерное, так и $n$-мерное). В каждом из названных отдельных случаев даем определение соответствующего проективного пространства и даем геометрические и аналитические модели этих пространств различной размерности, строим атласы в проективных пространствах различных размерностей и показываем дифференцируемость функций перехода.

Таким образом, в элективной дисциплине «Дополнительные главы дифференциальной геометрии и топологии» строится теория многообразий и изучаются такие важные примеры многообразий как проективные пространства и группы преобразований, а также изучаются такие важные свойства многообразий как связность, компактность, ориентируемость, благодаря наличию которых возможно приложение многообразий к решению многих теоретических и прикладных задач.

***Список использованной литературы:***

*1. Пуанкаре А. Analysis situs. – Из издания «Анри Пуанкаре. Избранные труды в трех томах. Том II». М., 1972.*

*2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М., 1979.*

*3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., 1979.*

*4. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. М.,2005.*

***

*Бұл жұмыста көпбейнелік ұғымын енгізу әдістемесі және көпбейнелі сыныптар, сонымен қатар оқыған арнайы пәндеріндегі «Дифференциалдық геометрияның және топологияның қосымша тараулары» көпбейнелілікті оқыту әдістемесі төңірегіндегі сұрақтар қаралады.*

***

*The questions of the methodic of the introduction of the conception of a manifold and types of manifolds and the questions of the methodic of the study of properties of manifolds in the elective course «Complementary chapters of differential geometry and topology» to be read by the author are discussed in this article.*