

2. На основе полученных данных в среде MSC.visualNastran 4D, построенная геометрическая модель узла клетки, отвечает необходимым критериям жесткости и прочности.

ЛИТЕРАТУРА

1 Пименов А.Ф., Сосковец О.Н., Трайно А.И. и др. Холодная прокатки и отделка жести. М., Металлургия, 1990, 208 с.

2 Машеков С.А., Нугман Е.З., Машекова А.С., и др. Непрерывный стан для прокатки полос из сталей и сплавов. Патент 20969. БИ №3, опубл. 16.03.2009.

**МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, СЫПУЧИХ ТЕЛ,  
ГРУНТОВ И ГОРНЫХ ПОРОД**

УДК 539.37

Алимжанов Айвар Муратбекович – д.ф.-м.н, профессор (Алматы, КазАТК)

Исмаканова Асель Касановна – аспирант (Алматы, КазНТУ)

Айтен Эльдар – аспирант (Алматы, КазНТУ)

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ  
ПРИКОНТУРНОЙ ЗОНЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В НЕОДНОРОДНОМ  
МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД**

*1. Напряженно-деформированное состояние (НДС) приконтурной зоны сферической полости в неоднородном массиве горных пород.* Неоднородный массив горных пород моделируется невесомым пространством со сферической полостью; при этом на бесконечности действуют сжимающие гидростатические усилия  $P$ , а по контуру полости действует равномерное давление крепи или содержащегося газа  $P_0$  (рисунок 1). Действующие нагрузки таковы, что вокруг сферической полости образуется полностью охватывающая ее зона неупругих деформаций (ЗНД). В области упругих деформаций справедлив обобщенный закон Гука, а в ЗНД выполняются условия пластичности Кулона-Мора и соотношения ассоциированного закона пластического деформирования.

Задача решается в безразмерных сферических координатах  $r, \theta, \psi$  (все величины с размерностью длины отнесены к радиусу полости, радиус полости  $r = 1$ ). Таким образом,  $r$  есть безразмерная радиальная координата произвольной точки массива (рисунок 1).

Тогда граничные условия записываются следующим образом:

$$\sigma_r^0 = P_0 \text{ при } r=1, \quad \sigma_r^0 = P \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Неоднородность механических характеристик массива в области упругих деформаций моделируется переменным (радиально неоднородным) модулем упругости пород  $E$ , представленным в виде ряда:

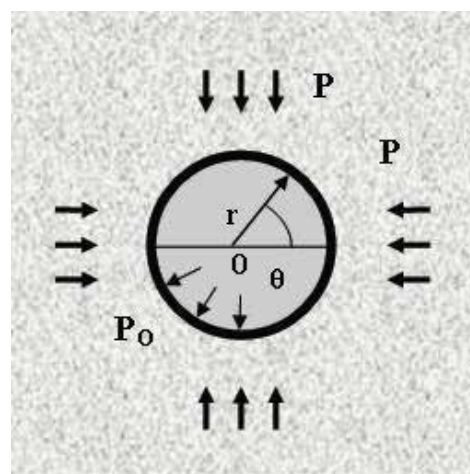
$$E(r) = E_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^n e_i r^{-i} \right), \quad (2)$$

а в зоне неупругих деформаций – переменным (радиально неоднородным) коэффициентом сцепления пород  $K$ , выраженным в наиболее общем виде:

$$K = K(r_0, r), \quad (3)$$

Здесь  $r_0$  - безразмерный радиус ЗНД.

В нашей задаче НДС является центрально-симметричным. Тогда имеем следующие основные соотношения, необходимые для расчета НДС пород приконтурной зоны сферической полости. Справедливо уравнение равновесия и уравнение совместности деформаций в сферической системе координат  $r, \theta, \psi$



Р и с у н о к 1 – Расчетная схема к определению НДС пород приконтурной зоны сферической полости в неоднородном массиве горных пород

$$\frac{d\sigma_r^0}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0) = 0, \quad \frac{d\varepsilon_\theta^0}{dr} + \frac{1}{r}(\varepsilon_\theta^0 - \varepsilon_r^0) = 0 \quad (4)$$

Здесь и далее индексом нулик наверху обозначены компоненты основного невозмущенного состояния.

В упругой области справедливы соотношения обобщенного закона Гука:

$$\sigma_{(r)}^0 = (2\mu(r) + \lambda(r))\varepsilon_{(r)}^0 + 2\lambda(r)\varepsilon_{(\theta)}^0, \quad \sigma_{(\psi)}^0 = \sigma_{(\theta)}^0 = 2(\mu(r) + \lambda(r))\varepsilon_{(\theta)}^0 + \lambda(r)\varepsilon_{(r)}^0 \quad (5)$$

где  $\mu(r) = G(r) = \frac{E(r)}{2(1+\nu)}$ ,  $\lambda(r) = \frac{2\nu G(r)}{1-2\nu}$  – переменные коэффициенты Ламе,  $G(r)$ -

переменный модуль сдвига пород;  $\sigma_i, \varepsilon_i$  – компоненты напряжений и деформаций.

Круглые скобки при индексах означают, что указанные компоненты относятся к упругой области.

В ЗНД имеет место условие пластичности Кулона-Мора, которое в рассматриваемом центрально-симметричном случае может быть представлено следующим образом:

$$\sigma_{[\theta]}^0 - \alpha_1 \sigma_{[r]}^0 = \beta K(r_0, r), \quad \sigma_{[\psi]}^0 = \sigma_{[\theta]}^0 \quad (6)$$

где  $\alpha_1 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$ ,  $\alpha_2 = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$  ( $\alpha_2 = \alpha_1 - 1$ ),  $\beta = \frac{2 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$ .

Здесь  $\varphi$  - угол внутреннего трения,  $K(r_0, r)$  – переменный коэффициент сцепления пород массива. Коэффициент  $K(r_0, r)$  связан с прочностным параметром  $H(r_0, r)$  (параметр огибающей кругов Мора) соотношением  $K(r_0, r) = H(r_0, r) \operatorname{tg} \varphi$ . При этом, угол внутреннего трения  $\varphi$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  горных пород, согласно данным [1], приняты постоянными.

Квадратные скобки при индексах означают, что указанные компоненты относятся к пластической зоне.

Согласно положениям деформационной теории пластичности компоненты деформации определяются следующим образом [1]:

$$\varepsilon_{[r]}^0 = \lambda_0 \frac{\partial \Phi(\sigma_r^0, \sigma_\theta^0)}{\partial \sigma_r^0}, \quad \varepsilon_{[\psi]}^0 = \varepsilon_{[\theta]}^0 = \lambda_0 \frac{\partial \Phi(\sigma_r^0, \sigma_\theta^0)}{\partial \sigma_\theta^0}. \quad (7)$$

Здесь  $\Phi(\sigma_r^0, \sigma_\theta^0) = \sigma_{[\theta]}^0 - \alpha_1 \sigma_{[r]}^0 - \beta K(r_0, r)$  - пластический потенциал, в качестве которого принимается условие (6).

Условия сопряжения напряжений и перемещений на границе ЗНД  $r_0$  имеют вид

$$\left[ \sigma_r^0 \right] = \sigma_{[r]}^0 - \sigma_r^0; \quad \left[ \sigma_r^0 \right] = \left[ \sigma_\theta^0 \right] = \left[ \sigma_\psi^0 \right] = \left[ u_r^0 \right] = 0 \quad \text{при } r = r_0. \quad (8)$$

Используя уравнение равновесия (4), соотношения закона Гука (5), условие пластичности (6), соотношения деформационной теории пластичности (7), условия (1) и (8), а также учитывая формулы (2) и (3), определим НДС пород приконтурной зоны сферической полости, проведённой в массиве с неоднородностью физико-механических свойств пород.

Для компонентов основного невозмущенного состояния получены следующие решения:

$$\begin{aligned} \sigma_{[r]}^0 &= 2\beta S_1(r_0, r) + P_0 r^{2\alpha_2}, \\ \sigma_{[\psi]}^0 &= \sigma_{[\theta]}^0 = \beta S_2(r_0, r) + \alpha_1 P_0 r^{2\alpha_2}, \\ u_{[\rho]}^0 &= C_2 r^{-2\alpha_1} \\ \sigma_{(\rho)}^0 &= \frac{E(r)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{\alpha=3}^4 C_\alpha \left[ \frac{du^{(\alpha)}}{dr} + 2\nu_1 \frac{u^{(\alpha)}}{r} \right], \\ \sigma_{(\psi)}^0 &= \sigma_{(\theta)}^0 = \frac{E(r)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{\alpha=3}^4 C_\alpha \left[ \nu_1 \frac{du^{(\alpha)}}{dr} + \frac{(1+\nu_1)u^{(\alpha)}}{r} \right], \\ u_{(r)}^0 &= C_3 u^{(3)} + C_4 (u^{(4)} - r), \\ S_1(r_0, r) &= \rho^{2\alpha_2} \int_1^r K(r_0, r) r^{-2\alpha_2-1} dr, \quad S_2(r_0, r) = 2\alpha_1 S_1(r_0, r) + K(r_0, r) \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$ ,  $C_4 = \frac{P(1-2\nu)}{E_0}$

$C_2$  и  $C_3$  определяются следующим образом:

$$C_2 = r_0^{2\alpha_1} (C_3 u^{(3)} + C_4 (u^{(4)} - r_0)), \quad C_3 = \frac{S_5(r_0, r_0) - C_4 S_3^{(4)}(r_0)}{S_3^{(3)}(r_0)},$$

$$S_3^{(\alpha)}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_{\alpha} - k + 2\nu_1) u_k^{(\alpha)} r^{\lambda_{\alpha} - k - 1}, \quad S_4^{(\alpha)}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (\nu_1 (\lambda_{\alpha} - k) + 1 + \nu_1) u_k^{(\alpha)} r^{\lambda_{\alpha} - k - 1}, \quad \alpha = 3; 4,$$

$$S_5(r_0, r) = \frac{2\beta S_1(r_0, r) + P_0 r^{2\alpha_2}}{\nu_0 E(r_0)} \quad \text{при } r = r_0. \quad \text{Здесь } \nu_0 = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

Связь между контактным давлением на стенки полости  $P_0$  (реакцией крепи) и безразмерным радиусом ЗНД  $r_0$  определяется из уравнения:

$$P_0 = \left\{ \frac{1}{\alpha_1 S_3^{(3)}(r_0) - S_4^{(3)}(r_0)} \left[ \frac{P(1 - \nu) E(r_0)}{(1 + \nu) E_0} (S_3^{(3)}(r_0) S_4^{(4)}(r_0) - S_3^{(4)}(r_0) S_4^{(3)}(r_0)) - \right. \right. \\ \left. \left. - S_3^{(3)}(r_0) \beta K(r_0, r_0) \right] - 2\beta S_1(r_0, r_0) \right\} r_0^{-2\alpha_2} \quad (10)$$

Коэффициенты  $u^{(3)}, u^{(4)}$  определяются с помощью рекуррентных формул:

$$u^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(\alpha)} r^{-k + \lambda_{\alpha}} \quad (\alpha = 3; 4), \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = 1, \quad (11)$$

$$u_j^{(\alpha)} = -\frac{1}{j(j - 2\lambda_{\alpha} - 1)} \sum_{i=1}^n [j(j - 2\lambda_{\alpha} - 1) + i(\lambda_{\alpha} - j + 1 - 2\nu_1)] e_i u_{j-i}^{(\alpha)}, \quad (12)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, \quad u_0^{(\alpha)} = 1, \quad u_{-j}^{(\alpha)} = 0.$$

Найдены все компоненты НДС (9) как в упругой области, так и в пластической зоне и выражение (10) для определения радиуса ЗНД  $r_0$  вокруг сферической полости. Таким образом, исследовано упругое и упругопластическое НДС пород приконтурной зоны сферической полости в массиве, характеризующемся неоднородностью механических свойств вида  $E(r)$  и  $K(r_0, r)$ . Уникальность формул (9) и (10) заключается в том, что они справедливы при любом распределении механических характеристик в формулах (2) и (3).

**2. Графоаналитический метод восстановления функций  $E(r)$  и  $K(r_0, r)$  через обобщенные полиномы (учёт технологической неоднородности окружающих пород).** Неоднородность пород приконтурной зоны сферической полости связана с технологией горно-строительного производства (создание подземной полости буровзрывным способом либо камуфлетным взрывом, последующее укрепление ее стенок упорочняющим набрызг-бетонным слоем, предшествующим установке подпорной крепи). Диаграммы распределения механических характеристик  $E(r)$  и  $K(r_0, r)$  в приконтурной зоне сферической полости в случае технологической неоднородности представляют собой сложные немонотонные кривые с четко выраженными точками максимума вблизи стенок полости [2] (рисунок 2).

Функция  $E(r)$  в (2) представляет собой обобщенный полином  $n$ -й степени с неопределенными коэффициентами  $e_i$  :  $E(r) = E_0(1 + \overline{P}_n(r^{-1})) = E_0(1 + \sum_{i=1}^n e_i r^{-i})$ . Она позволяет описать сложную кривую распределения модуля упругости породы вблизи сферической полости с помощью графоаналитического метода восстановления функции  $E(r)$  через обобщенные полиномы, предложенного в [3,4].

Суть указанного метода такова. Для описания заданной диаграммы  $E(r)$  выбирается на ней  $n$  характерных точек с координатами:

$$(r_j, E_j/E_0), j = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Координаты точек диаграммы  $E(r)$  (13) подставляются в формулу (2). В результате получим  $n$  линейных алгебраических уравнений для установления  $n$  коэффициентов  $e_i$  полинома функции  $\overline{P}_n(r^{-1})$ . Для этого составляется следующая СЛАУ:

$$\frac{E_j}{E_0} = 1 + \sum_{i=1}^n e_i r_j^{-i}, j = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Количество коэффициентов  $e_i$  соответствует количеству выбранных точек. Решая СЛАУ (14) любым известным методом, найдём все коэффициенты  $e_i$ .

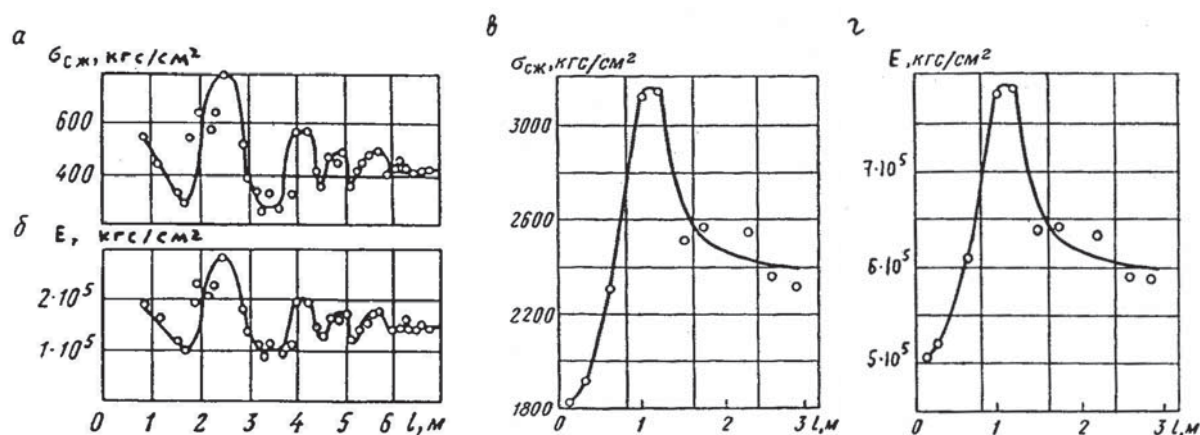
Коэффициенты  $e_i$  и определяют заданное распределение модуля упругости. Искомая функция  $E(r)$  представляет собой полином  $n$ -й степени (2) с установленными коэффициентами, причём точность соответствия функции (2) заданной диаграмме зависит от степени  $n$  установленного полинома (т.е. от количества выбранных характерных точек). Установлено, что полученный таким образом ряд (2) в основном знакопеременный.

Для функции  $E(r)$  вида (2) аналитически получено решение (9), содержащее обобщенные степенные ряды с рекуррентными коэффициентами. Оно определяет НДС вокруг сферической полости в массиве с технологической неоднородностью механических свойств, заданных в виде  $E(r)$  и  $K(r_0, r)$ . Следует отметить, что фактическая точность решения (9) будет определяться точностью соответствия самой функции  $E(r)$ , а заданная точность  $E(r)$  будет определяться, в свою очередь, числом  $n$  выбранных характерных точек.

Исследована сходимостъ найденных решений (9) – (12). Условие абсолютной сходимости решений зависит только от коэффициентов  $e_i$  и имеет такой вид:

$$\sum_{i=1}^n |e_i| < 1. \quad (15)$$

Условие (15) налагает ограничение снизу на величину  $n$ .



а,б – при создании полости буровзрывным способом в песчано-глинистом сланце ( $h=187$ м);

в,г – при создании полости камуфлетным взрывом в песчанике ( $h=375$ м).

Рисунок 2 – Диаграммы распределения механических характеристик ( $\sigma_{сж}$  и  $E$ ) пород приконтурной зоны подземной сферической полости ( $h$  – глубина заложения полости)

Диаграмма  $K(r_0, r)$  может быть описана произвольной функцией, так как решения (9), содержащие  $K(r_0, r)$ , получены в квадратурах. Следовательно, приведенный выше метод справедлив и для функции  $K(r_0, r)$ , которая также представляется в виде обобщенного полинома  $n$ -й степени. В этом случае для  $K(r_0, r)$  не будет ограничений по сходимости, поскольку функция (3) в решениях (9) является произвольной.

### 3. Устойчивость упругопластического равновесия приконтурной зоны сферической полости в неоднородном массиве горных пород

Устойчивость упругопластического равновесия стенок сферической полости в массиве с технологической неоднородностью исследована с помощью положений теории устойчивости в механике горных пород, разработанной М.Т.Алимжановым [1]. Технологическая неоднородность окружающих горных пород в приконтурной зоне полости учитывается через формулы  $E(r)$  и  $K(r_0, r)$  с помощью метода, указанного во 2 пункте.

В качестве критерия потери устойчивости упругопластического равновесия пород вокруг сферической полости принято появление другого решения, близкого к основному (9), при некотором критическом значении контактного давления на стенки полости  $P_0 = P_0^*$ . Заметим, что при  $P_0 = P$  НДС массива вокруг полости ничем не будет отличаться от соответствующего состояния нетронутого массива. При уменьшении  $P_0$  от его максимального значения  $P$  до некоторого критического значения  $P_0^*$  может произойти процесс потери устойчивости стенок полости, следовательно необходимо найти максимальное значение критического контактного давления на стенки полости (если возможно множество их значений), при котором возникает дополнительное решение (бифуркация).

При центрально-симметричной потере устойчивости равновесия стенок сферической полости дополнительное решение ищется в виде [1]:

$$\sigma_r = \sigma_r^0 + \sigma_r', \quad \sigma_\psi = \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta', \quad \tau_r = \tau_{r\theta}^0 + \tau_{r\theta}', \quad u_r = u_r^0 + u_r', \quad u_\theta = u_\theta^0 + u_\theta' \quad (17)$$



где индексом штрих наверху отмечены компоненты возмущений.

Дополнительные компоненты (компоненты возмущений) должны удовлетворять двум уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma'_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma'_r - \sigma'_\theta}{r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau'_{r\theta}}{r} = 0 \quad (18)$$

В ЗНД компоненты возмущений должны удовлетворять линеаризованным условиям пластичности Кулона-Мора, деформационной теории пластичности и линеаризованному соотношению из условия подобия девиаторов деформаций и напряжений [1]:

$$\sigma'_{[\theta]} - \alpha_1 \sigma'_{[r]} = 0, \quad \sigma'_{[\psi]} = \sigma'_{[\theta]}; \quad 2\alpha_1 \varepsilon'_{[\theta]} + \varepsilon'_{[r]} = 0; \quad \gamma'_{[r\theta]} = \frac{2(\varepsilon^0_{[\theta]} - \varepsilon^0_{[r]})}{\sigma^0_{[\theta]} - \sigma^0_{[r]}} \tau'_{[r\theta]} \quad (19)$$

Линеаризованные граничные условия при  $r = 1$  имеют следующий вид [1]:

$$\sigma'_{[r]} + \frac{d\sigma^0_{[r]}}{dr} u'_{[r]} = 0, \quad \tau'_{[r\theta]} - (\sigma^0_{[\theta]} - \sigma^0_{[r]}) \frac{\partial u'_{[r]}}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 1 \quad (20)$$

Дополнительные компоненты на границе зон пластических и упругих деформаций должны удовлетворять четырем линеаризованным условиям сопряжения [1]:

$$[\sigma'_r] = \sigma'_{[r]} - \sigma'_{(r)}; \quad [\sigma'_r] = [\tau'_r] = [u'_\theta] = 0 \quad \text{при } r = r_0 \quad (21)$$

$$[u'_r - A(r) \cdot \sigma'_\theta] = u'_{[r]} - u'_{(r)} + A(r)(\sigma'_{(\theta)} - \sigma'_{[\theta]}) = 0 \quad \text{при } r = r_0;$$

$$\text{Здесь } A(r) = \left[ \frac{du^0_r}{dr} \right] / \left[ \frac{d\sigma^0_\theta}{dr} \right], \quad \left[ \frac{du^0_r}{dr} \right] = \frac{du^0_{[r]}}{dr} - \frac{du^0_{(r)}}{dr}, \quad \left[ \frac{d\sigma^0_\theta}{dr} \right] = \frac{d\sigma^0_{[\theta]}}{dr} - \frac{d\sigma^0_{(\theta)}}{dr} \quad \text{при } r = r_0,$$

то есть большая квадратная скобка означает скачок указанной величины при переходе через разделяющую границу зон пластических и упругих деформаций.

Решение задачи сводится к определению такого значения давления  $P_0^*$ , при котором компоненты возмущения могут быть отличны от нуля. В зависимости от вида выражения для дополнительных компонентов перемещений (то есть от типа потери устойчивости) может быть получено бесконечное множество дополнительных решений, близких к основному. Нетривиальность каждого из этих решений приводит к характеристическому уравнению, позволяющему определить критическое контактное давление в зависимости от параметра волнообразования  $n$ :  $P_{0n}^* = P_0^*(n)$ . Искомое давление есть наибольшее из всех  $P_{0n}^*$ . Численные расчеты показывает, что наибольшее критическое контактное давление соответствует параметру  $n = 1$ , которое находится из совместного решения уравнения (10) и характеристического уравнения, представляющего собой определитель четвертого порядка:

$$|a_{ij}| = 0, \quad (22)$$

Элементы  $a_{ij}$  этого определителя равны:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 0, a_{12} = a_{13} = \beta K(r_0, 1) + \alpha_2 P_0, a_{14} = 0, \\
 a_{21} &= r_0^{2\alpha_2 - 1}, a_{22} = a_{23} = 0, a_{24} = S_9(r_0), \\
 a_{31} &= \frac{1}{2\alpha_1} S_7(r_0, r_0) - S_8(r_0, r_0), a_{32} = \frac{r_0^{1-2\alpha_1}}{2\alpha_1}, a_{33} = 1, a_{34} = v^{(5)}(r_0), \\
 a_{41} &= \frac{2\alpha_1 - 1}{2\alpha_1} S_7(r_0, r_0) - 2A(r_0)\alpha_1 r_0^{2\alpha_1 - 3}, a_{42} = \frac{2\alpha_1 - 1}{2\alpha_1} r_0^{1-2\alpha_1}, a_{43} = 0, \\
 a_{44} &= A(r_0)S_{10}(r_0) - u^{(5)}(r_0) - v^{(5)}(r_0).
 \end{aligned}$$

Неизвестные функции найдены следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k r^{-k-3}, v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k r^{-k-3} \\
 S_7(r_0, r) &= \frac{2\alpha_1}{2\alpha_1 - 1} r^{1-2\alpha_1} \int_1^r r^{2\alpha_1 - 1} S_6(r_0, r) dr, \\
 S_8(r_0, r) &= \frac{2\alpha_1}{2\alpha_1 - 1} \int_1^r S_6(r_0, r) dr, \\
 S_6(r_0, r) &= \frac{2(1 + 2\alpha_1)C_2 r^{-4}}{\beta[2\alpha_2 S_1(r_0, r) + K(r_0, r)] + \alpha_2 P_0 r^{2\alpha_2}}; \\
 S_9(r) &= v_0 v_4 E(r) \sum_{k=0}^{\infty} [u_k^{(5)} + (k + 4)v_k^{(5)}] r^{-k-4}, \\
 S_{10}(r) &= v_0 E(r) \sum_{k=0}^{\infty} [(2v_3 - (k + 3)v_1)u_k^{(5)} + 2v_3 v_k^{(5)}] r^{-k-4}
 \end{aligned}$$

Значения  $u_k$  и  $v_k$  определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned}
 u_k^{(5)} &= -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^n e_i [(M + iM_1)u_{k-i}^{(5)} + iM_2 v_{k-i}^{(5)}], \\
 v_k^{(5)} &= \frac{(k + 2 - v_1)}{(1 - v_1)k + 2(2 - v_1)} u_k^{(5)}; u_0^{(5)} = 1, v_0^{(5)} = \frac{1}{2}; \\
 M &= -k(k + 3)(k + 5), M_1 = (k + 3)(k + 2 + 2v_1) - 2(2 + v_1), \\
 M_2 &= 2[v_1(k + 3) + 2v_4]; v_3 = \frac{1}{2(1 - v)}, v_4 = \frac{1 - 2v}{2(1 - v)}
 \end{aligned}$$

Таким образом, впервые найдено аналитическое решение задачи об устойчивости упругопластического равновесия стенок сферической полости в условиях неоднородности механических свойств вида  $E(r)$  и  $K(r_0, r)$ . Ранее нами было найдено аналогичное решение для стенок вертикальной цилиндрической полости (скважины) [3,4].

Разработан метод определения критического контактного давления  $P_{01}^*$  на стенки сферической полости, обеспечивающего ее устойчивость. Это давление находится из совместного решения трансцендентного уравнения  $r_0 = f(P_0)$  (10) и характеристического уравнения  $|a_{ij}| = 0$  (22), представляющего собой определитель четвертого порядка. В



итоге создан метод управления устойчивостью стенок сферической полости в массиве с технологической неоднородностью окружающих горных пород, учитываемой через формулы  $E(r)$  и  $K(r_0, r)$  с помощью полуаналитического метода восстановления функций через обобщенные полиномы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алимжанов М.Т. Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород. Алматы: Наука, 1982, 272 с.
2. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механические процессы в породных массивах. М., Недра, 1986, 272 с.
3. Алимжанов А.М. НДС и устойчивость стенок скважины, обладающей кольматационным экраном // Вестник ТарГУ им.М.Х.Дулати. №4. 2006 г. С.55-65.
4. Алимжанов А.М. НДС и устойчивость стенок вертикальной скважины, имеющей кольматационный экран // Бурение и нефть (журнал РФ), 2008, №12, с.16-19.

УДК 531+539.376

Бисембаев Куатбай – к.ф-м.н., доцент (Алматы, КазНПУ)

#### КОЛЕБАНИЯ ТЕЛА НА ОПОРАХ КАЧЕНИЯ С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Во многих технических устройствах используются различного вида опоры качения для создания виброзащиты. Этот вид виброзащиты используется в практике сейсмозащиты зданий, в транспортной технике и др. [1].

Опора качения, используемая для виброзащиты, представляет собой геометрическое тело, ограниченное двумя сферическими поверхностями с радиусами кривизны  $r_1$  и  $r_2$ , таким образом, чтобы центр кривизны верхней контактной поверхности лежал ниже центра кривизны нижней контактной поверхности (рисунок 1). Кинематические свойства такой опоры с достаточной полнотой описаны в литературе [1]. Под действием длительных нагрузок, как опоры, так и поверхности (основания), опирающиеся на опору, деформируются. Вследствие этого, первоначальные радиусы кривизны элементов опоры меняются. Следовательно, меняются со временем и кинематические свойства опоры. В настоящей статье содержатся результаты по оценке эффективности виброзащиты опорами качения в предположении деформируемости оснований.

Рассмотрим опору качения следующей конструкции (рисунок 1). Тело качения 1 ограничено двумя сферическими поверхностями  $r_1$  и  $r_2$ , нижнее 2 и верхнее 3 основания опоры в окрестности точки контакта имеют радиус кривизны  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. Указанные кривизны оснований вследствие деформирования могут менять свое значение. Горизонтальное смещение оснований обозначим координатами  $x(t)$  и  $x_0(t)$  соответственно. На рисунке 1 опора качения изображена в положении, когда основания смещены относительно друг друга на величину  $(x - x_0)$ .