

Отсутствие амплитудного выброса на частоте 267 Гц, соответствующего более высокому номеру изгибной моды колебаний на середине шпалы (рисунок 6), объясняется большей площадью контакта центральной части шпалы с балластным основанием по сравнению с площадью контакта конца шпалы.

Колебания, регистрируемые на балластном основании, для скрепления типа ЖБР с полимерным боковым упором, имеют ярко выраженный характер – на всех полученных спектрограммах хорошо прослеживаются частоты в диапазоне 1-420 Гц с основными спектральными максимумами на частотах 27, 44, 72 Гц (рисунок 7).

На основании полученных результатов исследований колебаний элементов верхнего строения пути со скреплением типа ЖБР с полимерным боковым упором можно сделать следующие **выводы**:

Во-первых, колебания верхнего строения пути от ударного импульса имеют достаточно сложный характер. Элементы верхнего строения пути работают совместно, изменения в конструкции или работе хотя бы одного элемента вызывают изменения в работе каждого из них и пути в целом;

Во-вторых, по характеру виброграмм, регистрируемых на элементах верхнего строения пути, можно судить о способности используемого типа скрепления гасить высокочастотные вибрации. Влияние той или иной гармонической составляющей на характер виброграмм оценивается путем построения графиков их спектральной плотности дисперсии (спектрограмм). Данный метод можно использовать для сравнения работы элементов верхнего строения пути с различными типами скреплений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Влияние жесткости и неровностей пути на деформации, вибрации и силы взаимодействия его элементов. Тр. ЦНИИ МПС, вып. 370. М., Транспорт, 1969.
2. Исследование взаимодействия пути и подвижного состава. Тр. ДИИТ, вып. 148. Днепропетровск, 1974 г.
3. Исаенко Э.П., Финк В.К., Квашнин М.Я. Результаты определений амплитудно-частотных характеристик в элементах железнодорожного пути. Материалы международной НПК «Транспорт Евразии: взгляд в двадцать первый век», КазАТК, том IV, Алматы, 2008.
4. Фришман М.А. Как работает путь под поездами. М., Транспорт, 1969.

**УДК 539.37**

**Алимжанов Айвар Муратбекович – д.ф.-м.н, профессор (Алматы, КазАТК)**

**Исмаканова Асель Касановна – аспирант (Алматы, КазНТУ)**

**Куаншалиев Арман Амангельдиевич – аспирант (Алматы, ИММаш МОН РК)**

**Айтен Эльдар – аспирант (Алматы, КазНТУ)**

#### **УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МАССИВА СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ С УЧЕТОМ ЗАПРЕДЕЛЬНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД**

*Состояние вопроса.* Напряженно-деформированное состояние (НДС) горных пород, окружающих подземные сооружения (в том числе сферические полости), не всегда удается найти с использованием обычных условий пластичности, что связано со сложными горно-геологическими условиями их расположения, а также сложным характером процессов деформирования, протекаемых в приконтурной зоне. Горные

породы, окружающие подземные сооружения, имеют неоднородность механических (деформационных и прочностных) свойств, приобретенную во время горно-строительного производства или в процессе эксплуатации. В условиях предельных значений действующих нагрузок происходит снижение прочностных свойств - разупрочнение. До настоящего времени это явление учитывалось в упругопластических задачах по методу, предложенному М.Т.Алимжановым [1-2], через функцию пластичности, характеризующую идеально-пластическую среду вида  $f(\sigma_{ij}, \sigma_s(x_i, \chi_j)) = 0$  с прочностными характеристиками приствольной горной породы  $\sigma_s$ , зависящими от непрерывных и дифференцируемых функций координат  $x_i$  ( $i \leq 3$ ) и параметров нагружения  $\chi_j$ , устанавливающих зависимость прочностных свойств от граничных условий. Согласно различным экспериментальным данным [3,4], разупрочнение пород приконтурной зоны сопровождается не только снижением прочности, но и постепенным переходом породы в разрушенное состояние, характеризуемое остаточной прочностью и запредельными величинами необратимых деформаций. В связи с этим, возникла необходимость исследования НДС, прочности и устойчивости пород приконтурной зоны подземных сооружений (в частности сферических полостей) с учетом условий пластичности, не отражающих идеальнопластический характер деформирования.

Для учета механизма деформирования и разрушения пород приконтурной зоны вокруг сферической полости нами предлагается модифицированная функция пластичности  $f(\sigma_{ij}, \sigma_s(\varepsilon_{ii}^p, \varepsilon_s)) = 0$ , в которой критерии прочности породы  $\sigma_s$  зависят от величины ее необратимой деформации  $\varepsilon_{ii}^p$  т.е. необратимая деформация вместе с критериями прочности  $\varepsilon_s$  через прочностную характеристику включается в условие пластичности как один из определяющих параметров. Такое условие пластичности позволяет учесть снижение прочности (разупрочнение) пород приконтурной зоны и их переход в область запредельного деформирования.

На основании предложенного условия пластичности нами решена центральносимметричная упругопластическая задача об НДС пород приконтурной зоны вокруг сферической полости. Ранее нами, на основании предложенного условия пластичности, решена осесимметричная упругопластическая задача об НДС пород приконтурной зоны вокруг вертикальной цилиндрической полости (скважины) [5,6].

**Основные соотношения.** Рассмотрим случай центральносимметричного деформирования ( $\sigma_\theta = \sigma_\psi, \varepsilon_\theta = \varepsilon_\psi$ ). В этом случае имеют место соотношения, справедливые для центральносимметричного упругопластического массива со сферической полостью. Задача решается в безразмерных сферических координатах  $r, \theta, \varphi$  (все величины с размерностью длины отнесены к радиусу полости, т.е. радиус полости  $r = 1$ ).

Для учета процесса деформирования пород вокруг сферической полости рассмотрим модифицированную функцию пластичности, содержащую компоненты пластических деформаций  $\varepsilon_{ii}^p$  и деформационные критерии прочности  $\varepsilon_s$ .

В зоне разупрочнения (зона II) происходит пластическое разрыхление и разупрочнение-микротрещинообразование пород. Для их учета в процессе деформирования породы нами предлагается модифицированная функция пластичности Кулона-Мора в рассматриваемой постановке в сферической с/к

$$\sigma_{[\theta]} - \alpha_1 \sigma_{[\rho]} = \alpha_2 H(\varepsilon_{[\theta]}), \quad \sigma_{[\psi]} = \sigma_{[\theta]} \quad (1)$$

где  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\psi$  - компоненты напряжений,  $\alpha_1 = 1 + \sin \varphi / 1 - \sin \varphi$ ,  $\alpha_2 = 2 \sin \varphi / 1 - \sin \varphi$ ,  $\varphi$  - угол внутреннего трения породы (принимается постоянным),  $H$  - прочностной

параметр (параметр огибающей кругов Мора). Прочностной параметр  $H$  является переменным и представляет собой функцию вида  $H = H(\varepsilon_{[\theta]}) = H(\varepsilon_{[\theta]}, \varepsilon_1, \varepsilon_p)$ .

Данная функция записывается следующим образом:

$$H(\varepsilon_{[\theta]}, \varepsilon_1, \varepsilon_p) = H_1 + (H_p - H_1) \frac{\varepsilon_{[\theta]}^n - \varepsilon_1^n}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} \quad (2)$$

Здесь  $H_1$  - значение параметра прочности на границе зоны II или на границе зоны неупругих деформаций (ЗНД) (исходя из постановки задачи);  $H_p$  - величина остаточной прочности породы на границе зоны разрушения I ;  $\varepsilon_{[\theta]}$  - компонента линейной деформации;  $\varepsilon_1$  - значение линейной деформации  $\varepsilon_{[\theta]}$  на границе зоны разупрочнения II либо значение линейной упругой деформации  $\varepsilon_{(\theta)}$  на границе ЗНД (исходя из постановки задачи);  $\varepsilon_p$  - значение линейной деформации  $\varepsilon_{[\theta]}$  на границе зоны разрушения I, соответствующее переходу породы в разрушенное состояние с остаточной прочностью  $H_0$ ,  $n$  - параметр аппроксимации.

При  $\varepsilon_{[\theta]} = \varepsilon_1$  функция  $H(\varepsilon_{\theta}^p, \varepsilon_1, \varepsilon_p) = H_1$ ; при  $\varepsilon_{[\theta]} = \varepsilon_p$  функция  $H(\varepsilon_{\theta}^p, \varepsilon_1, \varepsilon_p) = H_p$ .

Все параметры функции (2)  $H_1, H_p, \varepsilon_{[\theta]}, \varepsilon_1, \varepsilon_p, n$  определяются из соответствующей полной диаграммы испытания породы на объемное сжатие.

Здесь и далее все компоненты НДС в ЗНД обозначены квадратными скобками у индексов, а в упругой зоне - круглыми скобками у индексов.

Функция изменения прочностного параметра  $H(\varepsilon_{\theta}^p, \varepsilon_1, \varepsilon_p)$  характеризует заданную диаграмму деформирования породы приствольной зоны (разупрочнение и пластическое разрыхление породы), начиная от первоначального значения  $H_1$  и вплоть до начала запредельного деформирования породы в зоне разрушения (значение  $H_0$ ). Параметр аппроксимации  $n$  с достаточной точностью учитывает нелинейный монотонный характер деформирования в зоне разупрочнения. Графики функции (2) представляют собой семейство монотонных выпуклых или вогнутых кривых, которые могут убывать или возрастать в зависимости от значений  $H_1$  и  $H_p$ .

В ЗНД (в зонах I и II) используются уравнение равновесия и уравнение совместности деформаций в сферической системе координат  $r, \theta, \psi$  в виде:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} = 0, \quad \frac{d\varepsilon_{\theta}}{dr} + \frac{\varepsilon_{\theta} - \varepsilon_r}{r} = 0 \quad (3), (4)$$

где  $\varepsilon_r, \varepsilon_{\theta}$  и  $\gamma_{r\theta}$  - компоненты деформаций.

В зоне разупрочнения (зона II) справедливы соотношения ассоциированного закона пластического деформирования

$$\varepsilon_{[r]} = \lambda \frac{\partial \Phi(\sigma_r, \sigma_{\theta})}{\partial \sigma_r}, \quad \varepsilon_{[\psi]} = \varepsilon_{[\theta]} = \lambda \frac{\partial \Phi(\sigma_r, \sigma_{\theta})}{\partial \sigma_{\theta}} \quad (5)$$

где  $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$  - компоненты деформаций и напряжений,  $\Phi(\sigma_{ij})$  - пластический потенциал, в качестве которого принимается условие (1),  $\lambda$  - некоторый множитель.

В зоне разрушения (зона I) вместо соотношений (5) используется условие максимальной положительной дилатансии разрушенного материала приствольной зоны без нарушения сплошности массива

$$\varepsilon_{[r]} + 2\varepsilon_{[\theta]} = \theta^*, \quad \varepsilon_{[\theta]} = \varepsilon_{[\psi]} \quad (6)$$

где  $\varepsilon_{[r]}$ ,  $\varepsilon_{[\theta]}$  и  $\varepsilon_{[\psi]}$  - компоненты деформаций в зоне разрушения,  $\theta^* = \text{const}$  - величина остаточного изменения объема породы зоны разрушения.

Функция (2) в условии (1) позволяет распространить условие Кулона-Мора, справедливое для перехода пород в предельное состояние, на случай запредельного деформирования (зона I). Такой подход допустим при условии, когда действующие напряжения в процессе деформирования не выходят за область сжатия.

**Определение НДС пород приконтурной зоны сферической полости в массиве горных пород.**

Массив горных пород со сферической полостью моделируется как невесомый массив, имеющий сферическую полость; при этом на бесконечности действуют сжимающие гидростатические усилия  $P$ , а по контуру полости действует равномерное давление крепи или содержащегося газа  $P_0$  (рисунок 1). Тогда граничные условия имеют вид:

$$\sigma_r = P_0 \text{ при } r = 1, \quad (7)$$

$$\sigma_r = P \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (8)$$

В области упругих деформаций справедлив закон Гука. Действующие нагрузки таковы, что вокруг полости образуется полностью охватывающая ее ЗНД. В ЗНД формируются две последовательно охватывающие друг друга зоны: зона разупрочнения (зона II), где порода подчиняется модифицированному условию пластичности Кулона-Мора, и примыкающая к контуру полости зона разрушения (зона I), характеризующаяся остаточной прочностью и запредельными величинами необратимых деформаций пород.

На границах раздела зон вокруг скважины имеют место условия сопряжения радиальных компонент напряжений и перемещений:

$$[\sigma_r] = [u_r] = 0 \text{ при } r = r_1, r = r_2 \quad (9)$$

Рассмотрим зону разрушения I. Найдем компоненты напряжений и перемещений. Для компонент напряжений в I зоне используем совместно условие (1), уравнение равновесия (3) и граничное условие на контуре (7). Для перемещений используем условие (6) и дополнительное кинематическое условие на границе рассматриваемой зоны I :  $\varepsilon_{[\theta]} = \varepsilon_p$  при  $r = r_1$ . В итоге получим:

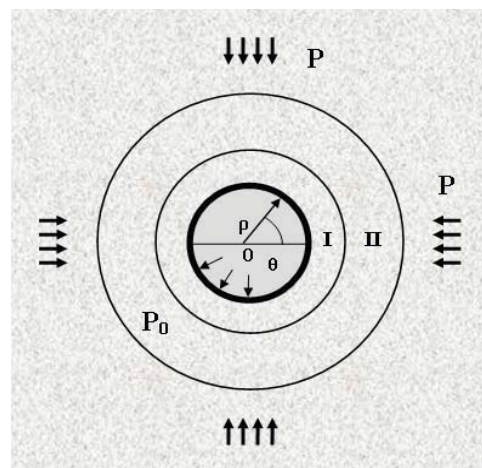
$$\begin{aligned} \sigma_{[r]}^I &= (P_0 + H_p)r^{2\alpha_2} - H_p, \sigma_{[\theta]}^I = (P_0 + H_p)\alpha_1 r^{2\alpha_2} - H_p \\ u_{[r]}^I &= \frac{r_1^3}{r^2} \left( \varepsilon_0 - \frac{\theta^*}{3} \right) + \frac{\theta^* r}{3}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $H_p$  - величина остаточной прочности породы на границе зоны разрушения I.

Рассмотрим зону разупрочнения II

Для нахождения компонент напряжений в зоне разупрочнения II используется условие (1), уравнение равновесия (3), уравнение совместности деформаций (4) и соотношения ассоциированного закона пластического деформирования (5).

Рассмотрим два варианта решения задачи. В первом случае предположим, что полные деформации в ЗНД приравниваются к пластическим. Во втором случае будем



Р и с у н о к 1. Расчетная схема к определению НДС пород в сферической полости в массиве с учетом модифицированного условия пластичности Кулона-Мора

считать, что в ЗНД полные деформации складываются из упругих и пластических. В первом случае из ассоциированного закона (5) имеем

$$\varepsilon_{[r]}'' + 2\alpha_1 \varepsilon_{[\theta]}'' = 0, \quad \varepsilon_{[\psi]}'' = \varepsilon_{[\theta]}'' \quad (11)$$

Используя все указанные соотношения, условие (11) и условие сопряжения радиальных компонент напряжений  $[\sigma_r] = 0$  на границе зоны I  $r = r_1$ , получим

$$\sigma_{[r]}'' = \frac{1}{D(\varepsilon_{[\theta]})} \left[ \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \left( \frac{H_1 \varepsilon_p^n - H_p \varepsilon_1^n}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} \ln \left| \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{[\theta]}} \right| + \frac{H_p - H_1}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} \left( \frac{\varepsilon_p^n}{n} - \frac{\varepsilon_{[\theta]}^n}{n} \right) \right) + \left( 1 + \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \ln \left| \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{[\theta]}} \right| \right) ((P_0 + H_p) r_1^{2\alpha_2} - H_p) \right]$$

$$\sigma_{[\psi]}'' = \sigma_{[\theta]}'' = \alpha_1 \sigma_{[r]}'' + \alpha_2 H(\varepsilon_{[\theta]}), \quad D(\varepsilon_{[\theta]}) = 1 + \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \ln \left| \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{[\theta]}} \right| \quad (12)$$

Во втором случае из ассоциированного закона (5) имеем  $\varepsilon_{(r)}^*$ ,  $\varepsilon_{(\theta)}^*$  и  $\varepsilon_{(\psi)}^*$  – максимальные значения упругих деформаций в момент начала развития ЗНД.

$$\varepsilon_{[r]}'' + 2\alpha_1 \varepsilon_{[\theta]}'' = \varepsilon_{(r)}^* + 2\alpha_1 \varepsilon_{(\theta)}^* = -c_e, \quad \varepsilon_{[\psi]}'' = \varepsilon_{[\theta]}'', \quad \varepsilon_{(\psi)}^* = \varepsilon_{(\theta)}^*, \quad (13)$$

Решая совместно (1), (3), (4), (5) и (13), условия сопряжения радиальных компонент напряжений:  $[\sigma_r] = 0$  на границе зоны I  $r = r_1$  получим

$$\sigma_{[r]}'' = \frac{1}{D_1(\varepsilon_{[\theta]})} \left[ \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \frac{H_1 \varepsilon_p^n - H_p \varepsilon_1^n}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} \ln \left| \frac{(1 + 2\alpha_1) \varepsilon_p + c_e}{(1 + 2\alpha_1) \varepsilon_{[\theta]} + c_e} \right| - 2\alpha_2 \frac{H_p - H_1}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} (Z_{ns}(\varepsilon_p) - Z_{ns}(\varepsilon_{[\theta]})) + \right]$$

$$+ \left( 1 + \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \ln \left| \frac{(1 + 2\alpha_1) \varepsilon_p + c_e}{(1 + 2\alpha_1) \varepsilon_{[\theta]} + c_e} \right| \right) ((P_0 + H_p) r_1^{2\alpha_2} - H_p)]$$

$$\sigma_{[\psi]}'' = \sigma_{[\theta]}'' = \alpha_1 \sigma_{[r]}'' + \alpha_2 H(\varepsilon_{[\theta]}), \quad D_1(\varepsilon_{[\theta]}) = 1 + \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \ln \left| \frac{(1 + 2\alpha_1) \varepsilon_{[\theta]} + c_e}{(1 + 2\alpha_1) \varepsilon_{[\theta]} + c_e} \right|$$

Выражения (14) содержат специальную функцию  $Z_{ns}(\varepsilon_{[\theta]})$ . Функция  $Z_{ns}(\varepsilon_{[\theta]})$  представляет собой полином степени  $n$  из  $n+1$  слагаемых, где в качестве аргумента выступает  $\varepsilon_{[\theta]}$  [7]:

$$Z_{ns}(\varepsilon_{[\theta]}) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{c_e^k \varepsilon_{[\theta]}^{n-k}}{(n-k)(1+2\alpha_1)^{k+1}} + \frac{(-1)^n c_e^n}{(1+2\alpha_1)^{n+1}} \ln \left| \frac{(1+2\alpha_1) \varepsilon_{[\theta]} + c_e}{(1+2\alpha_1) \varepsilon_{[\theta]} + c_e} \right|.$$

Для перемещений в I зоне в первом и втором случае используем ассоциированный закон (5) и кинематическое условие на границе рассматриваемой зоны II  $\varepsilon_{[\theta]} = \varepsilon_1$  при  $r = r_2$

$$u_{[r]}'' = \left( \frac{r_2}{r} \right)^{2\alpha_1} r_2 \varepsilon_1, \quad u_{[r]}'' = \left( \frac{r_2}{r} \right)^{2\alpha_1} r_2 \left( \varepsilon_1 + \frac{c_e}{2\alpha_1 + 1} \right) - \frac{r}{2\alpha_1 + 1} c_e \quad (15)$$

Рассмотрим внешнюю область упругих деформаций вокруг сферической полости. Компоненты НДС в упругой области находятся из соотношений закона Гука, граничного условия на бесконечности (8) и условия сопряжения радиальных компонент напряжений  $[\sigma_r] = 0$  на упругопластической границе (границе зоны II)  $r = r_2$ .

Для первого случая имеем:



$$\left. \frac{\sigma(r)}{\sigma(\psi) = \sigma(\theta)} \right\} = P \pm \frac{1}{kD(\varepsilon_1)} \left( \frac{r_2}{r} \right)^3 \left[ \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \left( \frac{H_1 \varepsilon_p^n - H_p \varepsilon_1^n}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} \ln \left| \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_1} \right| + \frac{H_p - H_1}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} \left( \frac{\varepsilon_p^n}{n} - \frac{\varepsilon_1^n}{n} \right) \right) + \right. \quad (16)$$

$$\left. + \left( 1 + \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \ln |\varepsilon_p| \right) \left( (P_0 + H_p) r_1^{2\alpha_2} - H_p \right) - PD(\varepsilon_1) \right]$$

$$u_{(r)} = - \frac{1 + \nu}{2E_1 D(\varepsilon_1)} \frac{r_2^3}{r^2} \left[ \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \left( \frac{H_1 \varepsilon_p^n - H_p \varepsilon_1^n}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} \ln \left| \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_1} \right| + \frac{H_p - H_1}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} \left( \frac{\varepsilon_p^n}{n} - \frac{\varepsilon_1^n}{n} \right) \right) + \right.$$

$$\left. + \left( 1 + \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \ln |\varepsilon_p| \right) \left( (P_0 + H_p) r_1^{2\alpha_2} - H_p \right) - PD(\varepsilon_1) \right]$$

Здесь  $k=1$  для  $\sigma_r$  и  $k=2$  для  $\sigma_\psi$  и  $\sigma_\theta$ ,  $\lambda = \nu/(1-\nu)$ ,  $E_1$  и  $\nu$  - постоянные характеристики упругого материала: модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Для второго случая получим:

$$\left. \frac{\sigma(r)}{\sigma(\psi) = \sigma(\theta)} \right\} = P \pm \frac{1}{kD_1(\varepsilon_1)} \left( \frac{r_2}{r} \right)^3 \left[ \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \frac{H_1 \varepsilon_p^n - H_p \varepsilon_1^n}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} \ln \left| \frac{(1+2\alpha_1)\varepsilon_p + c_e}{(1+2\alpha_1)\varepsilon_1 + c_e} \right| - 2\alpha_2 \frac{H_p - H_1}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} (Z_{ns}(\varepsilon_p) - Z_{ns}(\varepsilon_1)) + \right.$$

$$\left. + \left( 1 + \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \ln |(1+2\alpha_1)\varepsilon_p + c_e| \right) \left( (P_0 + H_p) r_1^{2\alpha_2} - H_p \right) - PD_1(\varepsilon_1) \right]$$

$$u_{(r)} = - \frac{1 + \nu}{2E_1 D_1(\varepsilon_1)} \frac{r_2^3}{r^2} \left[ \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \frac{H_1 \varepsilon_p^n - H_p \varepsilon_1^n}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} \ln \left| \frac{(1+2\alpha_1)\varepsilon_p + c_e}{(1+2\alpha_1)\varepsilon_1 + c_e} \right| - 2\alpha_2 \frac{H_p - H_1}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} (Z_{ns}(\varepsilon_p) - Z_{ns}(\varepsilon_1)) + \right.$$

$$\left. + \left( 1 + \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \ln |(1+2\alpha_1)\varepsilon_p + c_e| \right) \left( (P_0 + H_p) r_1^{2\alpha_2} - H_p \right) - PD_1(\varepsilon_1) \right] \quad (17)$$

Найдем теперь неизвестные радиусы  $r_1$  и  $r_2$  - границы раздела зон с различными физическими свойствами: зоны I с зоной II и зоны II с упругой областью.

Неизвестные радиусы  $r_1$  и  $r_2$  определяются из условий сопряжения радиальных перемещений:  $[u_r] = 0$  на границах раздела зон  $r = r_1$  (неизвестная граница зоны разрушения I) и  $r = r_2$  (неизвестная граница ЗНД II):

Рассмотрим первый случай. В этом случае имеем

$$r_1^{2\alpha_2} = \frac{1}{D(\varepsilon_p)(P_0 + H_p)} \left[ \left( 1 + \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \ln |\varepsilon_1| \right) (2(1-\nu)P - \varepsilon_1 E_1) - \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \frac{H_1 \varepsilon_p^n - H_p \varepsilon_1^n}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} \ln \left| \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_1} \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{H_p - H_1}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} \left( \frac{\varepsilon_p^n}{n} - \frac{\varepsilon_1^n}{n} \right) + \left( 1 + \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \ln |\varepsilon_p| \right) H_p \right]$$

$$r_1^{1+2\alpha_1} = r_2^{1+2\alpha_1} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_p} \quad (18)$$

Рассмотрим второй случай. В этом случае имеем:

$$r_1^{2\alpha_2} = \frac{1}{D_1(\varepsilon_p)(P_0 + H_p)} \left[ \left( 1 + \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \ln |(1+2\alpha_1)\varepsilon_1 + c_e| \right) (2(1-\nu)P - \varepsilon_1 E_1) - \frac{4 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \frac{H_1 \varepsilon_p^n - H_p \varepsilon_1^n}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} \ln \left| \frac{(1+2\alpha_1)\varepsilon_p + c_e}{(1+2\alpha_1)\varepsilon_1 + c_e} \right| + \right.$$

$$\left. + \alpha_2 \frac{H_p - H_1}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_1^n} (Z_{ns}(\varepsilon_p) - Z_{ns}(\varepsilon_1)) + \left( 1 + \frac{\sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \ln |(1+2\alpha_1)\varepsilon_p + c_e| \right) H_p \right]$$

$$r_1^{1+2\alpha_1} = r_2^{1+2\alpha_1} \frac{\varepsilon_1(1+2\alpha_1) + c_e}{\varepsilon_p(1+2\alpha_1) + c_e} \quad (19)$$

### Заклучение

Из формул (18) и (19) видно, что значения  $r_1$ ,  $r_2$  зависят от свойств породы массива  $E_1$ ,  $\nu$ ,  $\alpha_1$  ( $\varphi$ ),  $\theta$ ; действующих внешних нагрузок  $P_0$  и  $P$ , от показателей диаграммы деформирования породы  $H_1$ ,  $H_p$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_p$ , а также от характера зависимости  $H(\varepsilon_{[\theta]})$ : параметра монотонной нелинейности  $n$ .

Как и в случае с вертикальной цилиндрической полостью [5,6], особенностью решения данной упругопластической задачи является то, что напряженное состояние в зоне разупрочнения II не является статически определимым, т.к. напряжения содержат компоненты пластических деформаций  $\varepsilon_\theta$  и деформационные критерии прочности  $\varepsilon_p$ . В зоне разрушения I напряженное состояние полностью определяется условиями на внутреннем контуре и является статически определимым, но положение границы  $r_1$  этой зоны зависит от напряженного состояния внешних областей. Кроме того, в данном решении имеются две неизвестные границы  $r_1$  и  $r_2$ , разделяющие зоны с различными физическими свойствами, причем радиус зоны разупрочнения  $r_2$  и радиус внутренней зоны разрушения  $r_1$  взаимосвязаны. В этом заключаются отличия данного решения от решений подобных упругопластических задач в классических постановках.

Сравнение полученных результатов для подземной сферической полости с аналогичными для цилиндрической [5,6] показывает, что у сферической полости радиусы ЗНД  $r_2$ , разрушения  $r_1$  и смещения контура полости  $u_{[1]}^I$  при одинаково заданных параметрах несколько меньше, т.е. ее сопротивляемость внешним нагрузкам выше. Это свидетельствует о ее более устойчивой (пространственной) геометрии.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Алимжанов М.Т. Проблема устойчивости равновесия в задачах геомеханики // Варшава. Успехи механики, международный журнал. 1990, т.13, № 3/4, с. 21-57.
2. Алимжанов М.Т. Методы нелинейной механики сплошной среды в задачах управления горным давлением при бурении глубоких скважин (на англ. языке) // Варшава. Успехи механики, международный журнал. 1992, т. 15, № 3/4, С. 41-69.
3. Смирняков В.В. Изменение свойств пород, окружающих выработку. Устойчивость и крепление горных выработок / Межвуз.сб., Л., 1976, вып.2, с.127-132.
4. Кошелев В.Ф. Запредельные характеристики горных пород и упруго-пластические модели деформирования массива / Мат. Всесоюз. научн. конф. «Проблемы механики подземных сооружений». Л., Изд-во ЛГИ, 1979, т. III, с.123-126.
5. Алимжанов А.М. НДС массива с вертикальной скважиной с учетом модифицированного условия пластичности Кулона-Мора / Мат. Межд. научно-техн. конф. «Инновацион. пути развития нефтегазовой отрасли РК». Алматы, КазНТУ, 2007, с. 49-59.
6. Алимжанов А.М., Исмаканова А.К., Куаншалиев А.А. Упругопластическое НДС массива с вертикальной цилиндрической полостью с учетом модифицированного условия пластичности Кулона-Мора / Мат. III Межд. научн. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения». Алматы: Изд-во Эверо, 2009. Том III. С.316-327.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971, 1108 с.