НОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИЗДЕЛИЯ

УДК 504.3

Ташимов Лесбек Ташимович – Ректор, д.т.н., профессор
(Шымкент, Международный Казахско-Турецкий университет им. Яссауи)

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ В ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНОЙ АКТИВНОСТИ КОМПОНЕНТОВ

Основная проблема при математическом моделировании и расчете процессов пленочной хемосорбции заключается в том, что при решении сопряженной задачи поверхностные скорость и концентрация изначально неизвестны и должны определяться в процессе решения [1, 2]. Поэтому необходимо использовать некоторые аппроксимации для этих функций, которые будут затем уточняться в процессе решения. Вместе с тем, решая задачу конвективной диффузии с соответствующими граничными условиями, мы вынуждены подвергать преобразованию Лапласа неизвестные заранее функции в граничных условиях [3, 4].

В настоящей статье описывается разработанный нами альтернативный подход, позволяющий найти выход из этой ситуации, который заключается в возможности применить преобразование Лапласа по переменной ξ. Такая возможность возникает благодаря малой толщине диффузионного пограничного слоя в жидкой фазе и соответствующему граничному условию [5]:

$$\frac{\partial C}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow \xi \to \infty, \tag{1}$$

где C - концентрация; ξ - безразмерная толщина пленки.

Таким образом, применяем преобразование Лапласа в соответствии с формулами

$$A = \int_0^\infty \exp(-p\xi)\frac{\partial C}{\partial \xi}d\xi, \qquad \mathrm{Lp}\left(\xi\frac{\partial C}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial A}{\partial p}, \tag{2}$$

$$\mathrm{Lp}\left(\frac{\partial C}{\partial X}\right) = \frac{1}{p}\frac{\partial A}{\partial X} + \frac{1}{p}\frac{dC_S}{dX}. \tag{3}$$

В результате получаем квазилинейное уравнение 1-го порядка для образа градиента концентрации:

$$\frac{1}{p}\frac{\partial A}{\partial X} + \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p} = pA - \frac{1}{p}\frac{dC_S}{dX} + \Theta(1 - mC_S). \tag{4}$$

Вид функции Θ определяется граничными условиями.

Особенность разработанного нами подхода заключается в том, что не нужно преобразовывать по Лапласу неизвестные функции продольной координаты на свободной поверхности раздела фаз. Есть и другие преимущества, которые выявляются в ходе дальнейшего анализа.

Решение полученного квазилинейного уравнения ищем на характеристиках, которые имеют в нашем случае довольно простой вид:

$$\varphi = \exp(-X)p^2. \tag{5}$$

Вид характеристик таков, что удобным и естественным представляется использование экспоненциальных рядов в качестве основных аппроксимирующих выражений для поверхностных функций продольной координаты. Стандартная процедура решения квазилинейных уравнений предполагает заданными начальные функции вида $A_o = A(p, X = 0)$.

Такой подход, естественным образом, не реализуем, но, т.к. решается сопряженная задача, можно для выделения частного решения вместо стандартной процедуры использовать ограничения для поверхностных функций, вытекающие из физического смысла. При этом, необходимо поставить ограничение $|A| < \infty$ при $y \to \infty$. Тогда далее можно оперировать с аппроксимациями поверхностных функций.
Можно использовать простую физически правомерную аппроксимацию вида

$$C_S(X) = \frac{1 - \exp(-\varsigma X)}{m}. \tag{6}$$

Тогда уравнение (4.37) приобретает вид

$$\frac{1}{p}\frac{\partial A}{\partial X} + \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p} = pA - \frac{1}{p}\frac{\varsigma}{m}\exp(-\varsigma X) + \Theta\exp(-\varsigma X). \tag{7}$$

На основе условия ограниченности, получаем решение этого уравнения с помощью метода характеристик:

$$A = \exp(-\varsigma X + p^2)p^{2\varsigma}\left(-\frac{\varsigma}{m}\int_p^\infty (\exp(-t^2)/t^{2\varsigma+1})dt + \Theta\int_p^\infty (\exp(-t^2)/t^{2\varsigma})dt\right). \tag{8}$$

Далее целесообразно воспользоваться возможностью свободного выбора параметра p, который, хотя и присутствует в решаемом квазилинейном уравнении в качестве переменной, но не имеет физического смысла в рассматриваемой математической модели.

Тогда, в окончательных выражениях до того, как произведено обращение, ему может быть придано любое значение из области значений, гарантирующей сходимость интегрального преобразования. Поэтому рассмотрим интегралы в полученной формуле в асимптотическом приближении, т. е. при больших $p >> 1$.

Используя прием взятия интегралов по частям, после ряда преобразований получаем следующие асимптотические разложения:

$$A = \exp(-\varsigma X)\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(p^2)\mathrm{erfc}p - \frac{\varsigma}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(2j+1)!}{j!2^{2j}}\left(\frac{1}{p^{2(j+2)}} + S_*\right)\right\}.$$
$$S_* = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i(\varsigma + j + 2)\ldots(\varsigma + j + i + 2)}{p^{2(j+i+2)}} \tag{9}$$

Оригинал находится, как обычно, с помощью формул обращения:

$$\mathrm{Lp}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(p^2\right)\mathrm{erfc}p\right)=\exp\left(-\xi^2/4\right),\quad \mathrm{Lp}^{-1}\left(\frac{1}{p^{n+1}}\right)=\frac{1}{n!}\xi^n. \tag{10}$$

Получим решение задачи (7) на основе использования аппроксимации более общего вида:

$$C_S(X)=\frac{1-\gamma(X)}{m}, \tag{11}$$

где функция $\gamma(X)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$X=0\Rightarrow\gamma(X)=1,\qquad X\to\infty\Rightarrow\gamma(X)\to 0. \tag{12}$$

Используем аппроксимацию поверхностной функции $\gamma(X)$ в форме разложения в ряд Фурье:

$$\gamma(X)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}C_n\exp(inX). \tag{13}$$

Выбор аппроксимирующей функции такого вида требует анализа проблем, связанных с неоднозначностью при определении свободного члена.

Для того, чтобы избежать этого, продолжим функцию $\gamma(X)$ на область $X<0$ нечетным образом. Тогда

$$C_0=0,\qquad C_n=iB_n,\quad C_{-n}=-iB_n. \tag{14}$$

Квазилинейное уравнение для образа градиента концентрации по толщине пленки теперь приобретает вид:

$$\frac{1}{p}\frac{\partial A}{\partial X}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p}=pA-i\frac{C_\infty}{pm}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}nC_n\exp(inX)+\alpha C_\infty\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}C_n\exp(inX). \tag{15}$$

После замены $A=A_o\exp\left(p^2\right)$, эквивалентной вариации постоянной, обыкновенное дифференциальное уравнение на характеристиках приобретает вид:

$$\exp\left(p^2\right)\frac{dA_o}{dp}=\frac{C_\infty}{mp}\sum_{n=1}^{\infty}nB_n\left(\varphi^{-in}p^{2in}+\varphi^{in}p^{-2in}\right)+i\alpha C_\infty\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi^{-in}p^{2in}+\varphi^{in}p^{-2in}\right). \tag{16}$$

Решение полученного уравнения выглядит следующим образом:

$$A=\exp\left(p^2\right)\left[\frac{C_\infty}{m}\left(\sum_{n=1}^{\infty}nB_n\varphi^{in}\int\frac{\exp\left(-p^2\right)}{p^{2in+1}}dp+\sum_{n=1}^{\infty}nB_n\varphi^{-in}\int\exp\left(-p^2\right)p^{2in-1}dp\right)\right]+$$

$$+\exp\left(p^2\right)i\alpha C_\infty\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\varphi^{in}\int\frac{\exp\left(-p^2\right)}{p^{2in}}dp-\sum_{n=1}^{\infty}B_n\varphi^{-in}\int\exp\left(-p^2\right)p^{2in}dp\right). \tag{17}$$

Для поиска оригинала теперь необходимо подставить в полученное выражение формулу для характеристик.

Приведенные ниже асимптотические разложения получены на основе приема взятия интегралов по частям.

$$\int_z^\infty \frac{\exp\left(-t^2\right)}{t^{2s}}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\operatorname{erfc} z}{z^{2s}} - \frac{s\exp\left(-z^2\right)}{4}\Re\,, \tag{18}$$

$$\Re = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(2n+1)!}{n!2^{2n}}\left[\frac{1}{z^{2(s+n+2)}} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j(s+n+2)\ldots(s+n+j+1)}{z^{2(s+n+j+2)}}\right], \tag{19}$$

$$\operatorname{erfc} t = \frac{2\exp\left(-t^2\right)}{\sqrt{\pi}(2t)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!}{n!(2t)^{2n}}. \tag{20}$$

При нечетном k можно воспользоваться асимптотическим разложением следующего вида:

$$\int_z^\infty \exp\left(-t^2\right)t^{-k}dt = \frac{1}{2}\frac{\exp\left(-z^2\right)}{z^{k+1}}\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{(k+1)\ldots(k+2j-1)}{\left(2z^2\right)^j}\right]. \tag{21}$$

В итоге после преобразований искомый результат можно представить в виде суммы четырех слагаемых

$$A = \operatorname{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left(\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4\right)\right], \tag{22}$$

где Re -действительная часть числа.

Для каждого из слагаемых получаем следующие выражения:

$$\Sigma_1 = \frac{C_\infty n}{m}\exp(-inX)\frac{1}{2p^2}\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j(2in+2)\ldots(2in+2j)}{\left(2p^2\right)^j}\right], \tag{23}$$

$$\Sigma_2 = \frac{nC_\infty}{m}\exp(inX)\sum_{j=1}^{\infty}p^{-2j}\,, \tag{24}$$

$$\Sigma_3 = i\alpha C_\infty\exp(-inX)\left\{\exp\left(p^2\right)\operatorname{erfc} p - \frac{in}{4}\Lambda\right\}, \tag{25}$$

где

$$\Lambda = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N(2N+1)!}{N!2^{2N}}\left[\frac{1}{p^{2N+4}} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j(in+N+2)\ldots(in+N+1+j)}{p^{2(N+2+j)}}\right], \tag{26}$$

$$\Sigma_4 = -i\alpha C_\infty\exp(inX)\sum_{j=1}^{\infty}p^{-2j+1}\,. \tag{27}$$

Анализ полученных формул показывает, что использованный подход позволяет получать разложения изображения искомой функции по обратным степеням параметра интегрального преобразования Лапласа p. Взятие оригинала после этого не представляет никаких математических трудностей [5].

Отсюда получаем решение неавтомодельной задачи пленочной абсорбции при граничных условиях достаточно общего вида, приближенного к реализуемым в практических условиях. В то же время полученные выражения весьма громоздки. Для расчетов стационарного процесса на компьютере это, конечно, не имеет принципиального значения. Однако при попытке использовать полученные стационарные решения, например, в качестве базовых, при исследовании устойчивости процесса, математические трудности могут оказаться значительными. Эти соображения побуждают к поиску

приближенных решений, которые при достаточной точности, были бы, тем не менее, не столь громоздки.

Выход из этой ситуации заключается в подробном анализе порядка каждого члена в уравнении конвективной диффузии.

Данный подход основан на том, что причиной изменения поверхностной скорости пленки за пределами участка гидродинамической стабилизации является только градиент поверхностного натяжения вдоль межфазной поверхности. Тогда вполне резонно предположить, что *X*- производная поверхностной скорости и отношение касательных напряжений в жидкой пленке на ее поверхности и вблизи стенки τ_S/τ_W имеют один и тот же порядок малости.

Такой вывод подтверждается также предварительным анализом данных исследования, проведенного в работе [4]. Из этого анализа следует оценка последнего отношения как $(\mathrm{Pe})^{-m}$, где $m>1$. Но тогда появляется возможность воспользоваться асимптотическими методами анализа. Согласно этой идее, мы будем далее рассматривать производную $\dfrac{dU_S}{dX}$ как малый параметр ε и искать решение уравнений конвективной диффузии и теплопереноса в виде разложений по этому малому параметру

$$C = C_0 + \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \ldots, \tag{28}$$

$$\overline{T} = \overline{T}_o + \varepsilon \overline{T}_1 + \varepsilon^2 \overline{T}_2 + \ldots, \tag{29}$$

где $\varepsilon = \dfrac{dU_S}{dX}$, $\overline{T} = \dfrac{T}{T_W}$.

После обезразмеривания уравнение конвективной диффузии приобретает вид

$$U_S \frac{\partial C}{\partial X} - \varepsilon y \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Pe}} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \ . \tag{30}$$

В нулевом приближении получаем следующее уравнение:

$$\rangle U_S \langle \frac{\partial C_0}{\partial X} = \frac{1}{\mathrm{Pe}} \frac{\partial^2 C_0}{\partial y^2} . \tag{31}$$

Граничные условия для нулевого приближения сохраняют тот же вид, что и для общего решения.

С помощью преобразования Лапласа получаем решение нулевого порядка:

$$C_0 = \mathrm{erfc}(\eta) - \exp\left(2\eta \mathrm{Nu}\sqrt{\tilde{\tau}/\mathrm{Pe}} + \mathrm{Nu}^2\, \tilde{\tau}/\mathrm{Pe}\right)\mathrm{erfc}\left(\eta + \mathrm{Nu}\sqrt{\tilde{\tau}/\mathrm{Pe}}\right), \tag{32}$$

где

$$\overline{X} = X/h,\ \ Y = y/h,\ \ \tilde{\tau} = X/\rangle U_S \langle,\ \ \eta = \frac{y}{2\sqrt{\tilde{\tau}/\mathrm{Pe}}},\ \ \langle U_S \rangle \to \langle U_S \rangle / \langle U \rangle,$$

$$\mathrm{Pe} = \frac{\rangle \mathrm{U} \langle h}{D_l}, \quad \mathrm{Nu} = \frac{\alpha}{D_l h}.$$

Далее, собирая члены разложения при ε^1, получаем уравнение для составляющей концентрации первого порядка:

$$\rangle U_S \langle \frac{\partial C_1}{\partial X} - \frac{1}{\mathrm{Pe}} \frac{\partial^2 C_1}{\partial Y^2} = Y \frac{\partial C_0}{\partial Y}. \tag{33}$$

Соответствующие граничные условия:

$$Y = 0 \Rightarrow \frac{\partial C_1}{\partial Y} = \mathrm{Nu} C_1, Y \to \infty \Rightarrow C_1 \to 0. \tag{34}$$

После обращения и ряда преобразований получаем следующее решение с учетом поправки первого порядка:

$$C = C_o + \frac{dU_S}{dX}\left(C_{11} + C_{12} + C_{13}\right), \tag{35}$$

где для отдельных слагаемых в скобке в правой части (35) справедливы соотношения

$$C_{11} = \frac{\mathrm{Nu}}{4\mathrm{Pe}}\left\{\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Nu}^2}\mathrm{erfc}\left(\frac{Y\sqrt{\mathrm{Pe}}}{2\sqrt{\tilde{\tau}}}\right) - \frac{2\sqrt{\mathrm{Pe}}}{\mathrm{Nu}}\sqrt{\frac{\tilde{\tau}}{\pi}}\exp\left(-\frac{Y^2\mathrm{Pe}}{4\tilde{\tau}}\right)\right\} -$$

$$-\frac{\mathrm{Nu}}{4\mathrm{Pe}} - \left\{\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Nu}^2}\left(1 - Y\mathrm{Nu} - \frac{2\mathrm{Nu}^2}{\mathrm{Pe}}\tilde{\tau}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{Nu}^2}{\mathrm{Pe}}\tilde{\tau} + Y\mathrm{Nu}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{Y\sqrt{\mathrm{Pe}}}{2\sqrt{\tilde{\tau}}} + \frac{\sqrt{\tilde{\tau}}\mathrm{Nu}}{\sqrt{\mathrm{Pe}}}\right)\right\}; \tag{36}$$

$$C_{12} = \frac{Y^2\mathrm{Nu}}{4}\exp\left(Y\mathrm{Nu} + \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\tilde{\tau}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{\mathrm{Nu}}{\sqrt{\mathrm{Pe}}}\sqrt{\tilde{\tau}} + \frac{Y\sqrt{\mathrm{Pe}}}{2\sqrt{\tilde{\tau}}}\right); \tag{37}$$

$$C_{13} = \frac{Y}{4}\left\{\mathrm{erfc}\left(\frac{Y\sqrt{\mathrm{Pe}}}{2\sqrt{\tilde{\tau}}}\right) - \exp\left(Y\mathrm{Nu} + \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\tilde{\tau}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{\mathrm{Nu}\sqrt{\tilde{\tau}}}{\sqrt{\mathrm{Pe}}} + \frac{Y\sqrt{\mathrm{Pe}}}{2\sqrt{\tilde{\tau}}}\right)\right\}. \tag{38}$$

Отсюда получаем последовательность рекуррентных неоднородных уравнений, с помощью которых можно рассчитывать приближения более высоких порядков малости. Важно, что при этом не возникает никаких принципиальных математических трудностей, хотя процедура становится все более громоздкой.

Достаточно хорошее совпадение наблюдается даже при использовании только приближений нулевого и первого порядков [5]. Это позволяет использовать результаты предварительно проведенного компьютерного эксперимента для достаточно неплохой аппроксимации профиля концентрации по толщине пленки полиномами не выше третьей степени. Методика решения задачи основана на условии медленного изменения поверхностных функций с продольной координатой и, во-вторых, в процессе счета путем последовательных итераций уточняются значения коэффициента ς, входящего в полученные ранее формулы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксельрод Ю.В. Газожидкостные хемосорбционные процессы. Кинетика и моделирование. М. Химия, 1989, 240 с.

2. Грымзин Ю.Н., Квашнин С.Я., Лотхов В.А., Малюсов В.А. О влиянии градиента поверхностного натяжения и добавки поверхностно-активного вещества на эффективность лабораторной насадочной ректификационной колонны //Теор. основы хим. технол., 1982, т. 16, №2, с. 251.

3. Дильман В.В. Некоторые вопросы моделирования и расчета газожидкостных реакторов //Теор. основы хим. технол., 1975, т. 9, №6, с. 844.

4. Дильман В.В., Найденов В.И. О межфазной неустойчивости и влиянии градиента поверхностного натяжения на скорость хемосорбции при гравитационном течении жидкой пленки //Теор. основы хим. технол., 1986, т. 20, №3, 316 с.

5. Ташимов Л.Т. Конвективный тепло- и массообмен в пленочных процессах химической технологии /Вопросы моделирования и устойчивости. Алматы: Білім, 1999, 200 с.

УДК 625.141

Кулманова Назира Кадыровна – д.т.н, профессор (Алматы, КазАТК)
Сейтказинов Оразалы Дауткалиевич – преподаватель (Алматы, КазАТК)

ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ СВАРКИ НА ОБРАЗОВАНИЕ ДЕФЕКТОВ В СВАРНЫХ ШВАХ

Одной из актуальных проблем железнодорожного пути является выявление повреждений сварных рельсовых стыков. Однако факторы, которыми обусловлено появление дефектов, еще не искоренены полностью. Для решения такой проблемы необходимо выявить виды и причины повреждений сварных рельсовых стыков.

В работе представлены результаты анализа состояния стыков, т.е. сварных швов железнодорожного пути за период 2004 –2009гг., на дорогах РК (западного региона).

На рисунке 1 приведены виды и причины повреждений рельсовых стыков, выполненных электродуговой сваркой, на рисунке 2 проиллюстрирована ситуация с неоднородностями металла, как исходной причиной повреждений. В результате исследований установлено, что:

- швы, выполненные дуговой сваркой, повреждаются, в основном, дефектами усталостного характера.
- первоисточниками усталостных повреждений являются ликвационные трещины(термические трещины в зоне воздействия высоких температур), усадочные трещины в сварном металле и непровары.
- все поперечные дефекты в шейке рельса возникают вследствие ликвационных трещин, а все поперечные дефекты в подошве вследствие непровара.

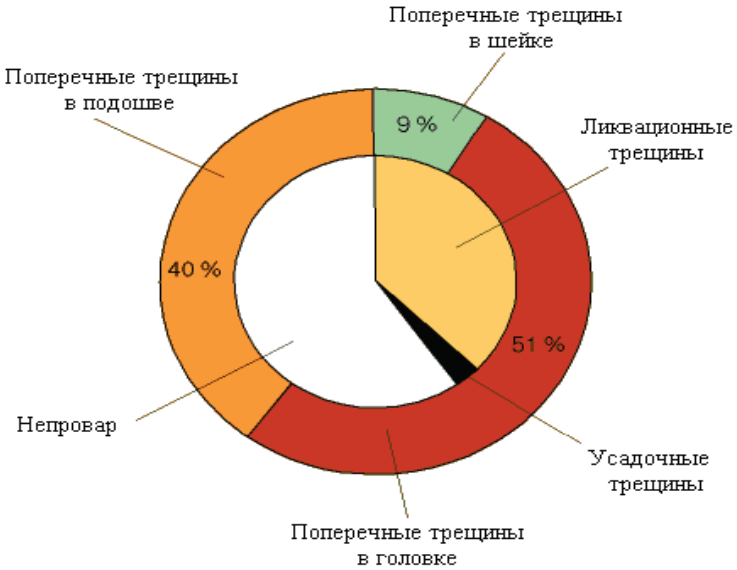

Рисунок 1 - Виды и причины дефектов в швах, выполненных электродуговой сваркой