

УДК 504.3.054.:656

Темирханова Айгуль Музафархановна – магистр, преподаватель
(Шымкент, АИУ)

Балабеков Оразалы Сатимбекович – д.т.н., академик НАН РК (Шымкент, АИУ)

Едилбаев Бауыржан Темирболатович – к.т.н. (Рудный, РИИ)

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА НА СПУСКАХ И ПОДЪЕМАХ

Дороги в городах Казахстана, как правило, имеют сложный рельеф и характеризуются участками спусков и подъемов, что приводит к частой смене режимов работы двигателей транспортных средств. При этом меняются также режимы газовой выделенности и состав выхлопных газов [1-2]. Для правильного учета отмеченных факторов нужно иметь достаточно простые модели для описания кинематических характеристик (скоростей и ускорений) транспортного средства на дороге с подъемами и спусками. В настоящей статье предлагается подход к разработке таких моделей и получены зависимости для расчета кинематических характеристик, которые могут быть использованы для оценки экологической ситуации на дорогах [3-4].

Рассмотрим движение автомобиля на местности, представляющей собой продолжительный спуск и последующий подъем. Поскольку естественный рельеф такого вида вряд ли можно рассматривать как совокупность наклонных плоскостей, более адекватной моделью, вероятно, будет сопряжение двух кривых большого радиуса кривизны. Для упрощения анализа примем схему рельефа в виде сопряжения двух дуг окружностей (рисунок 1). Опишем вначале ситуацию, когда скат и подъем – вогнутые кривые (яма).

Уравнения движения на спуске (участок L_1) в подвижной системе координат, связанной с автомобилем, выглядят следующим образом:

$$-mR\ddot{\alpha} = mg \sin \alpha - kN + \frac{W}{R\dot{\alpha}}, \quad (1)$$

$$N - mg \cos \alpha = mR\dot{\alpha}^2. \quad (2)$$

Уравнение (1) – второй закон Ньютона в проекции на направление скорости автомобиля, уравнение (2) – баланс сил в проекции на нормаль к скорости автомобиля.

После подстановки (2) в (1) получаем суммарное уравнение движения

$$\ddot{\alpha} - k\dot{\alpha}^2 + \frac{W}{mR^2} \frac{1}{\dot{\alpha}} + \frac{g}{R} (\sin \alpha - k \cos \alpha) = 0, \quad (3)$$

где α – угловая координата автомобиля относительно центра кривизны ската дороги; R – радиус кривизны ската, м; k – коэффициент трения о поверхность дорожного покрытия; m – масса автомобиля, кг; g – ускорение свободного падения, м/с²; W – мощность двигателя, Вт.

Уравнение (3) содержит три управляющих параметра: k , $p = \frac{W}{mR^2}$ и $s = \frac{g}{R}$.

Перепишем (3) в виде

$$\ddot{\alpha} - k\dot{\alpha}^2 + \frac{p}{\dot{\alpha}} + s(\sin \alpha - k \cos \alpha) = 0. \quad (4)$$

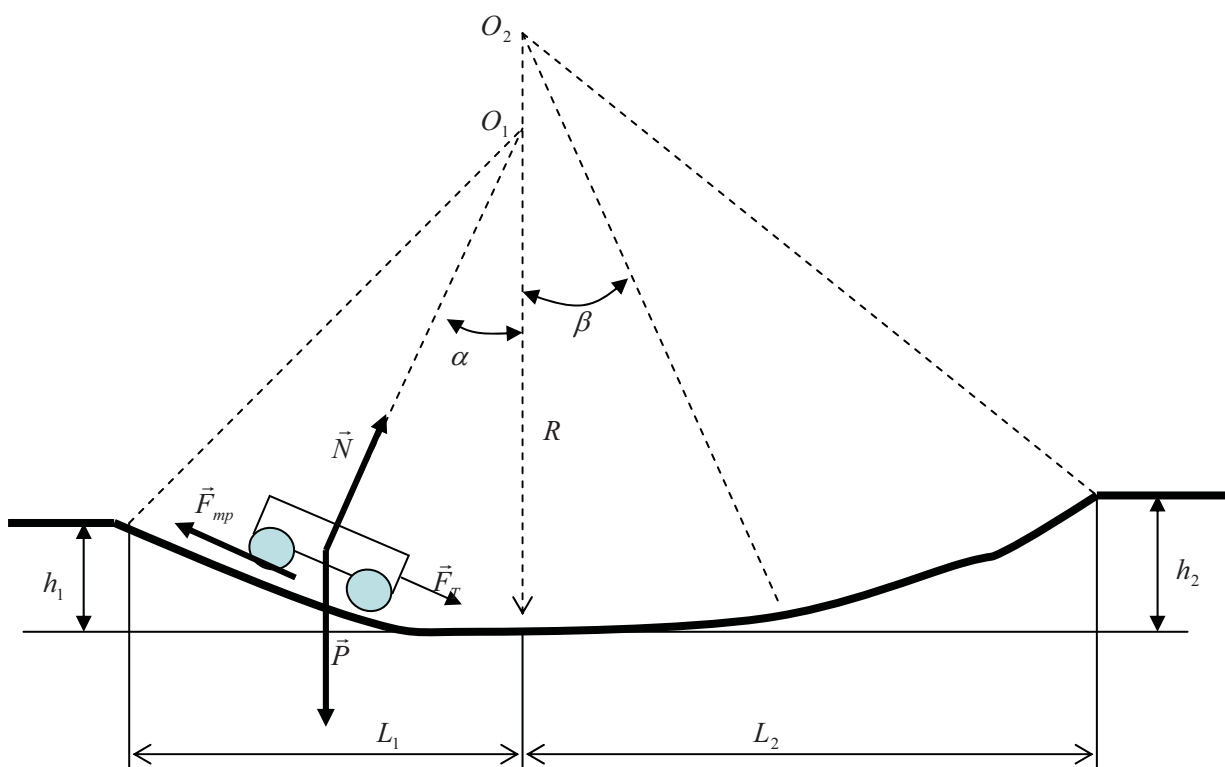
Введем замену для функции $\dot{\alpha} = U(\alpha)$. Тогда $\ddot{\alpha} = \frac{dU}{d\alpha}U$, и уравнение (4) приобретает вид

$$U^2 \frac{dU}{d\alpha} - kU^3 + sf(\alpha)U = -p, \quad (5)$$

где $f(\alpha) = \sin \alpha - k \cos \alpha$

Введем обозначение для функции $U^3 = Z$. Тогда (5) приобретает вид

$$\frac{1}{3} \frac{dZ}{d\alpha} - kZ + sf(\alpha)\sqrt[3]{Z} = -p. \quad (6)$$



\vec{F}_T - сила тяги двигателя; \vec{P} - вес транспортного средства; \vec{N} - сила нормальной реакции полотна дороги; \vec{F}_{mp} - сила трения о покрытие дороги.

Рисунок 1 Схема движения автомобиля при пересечении углубления большого масштаба

Аналитическое решение уравнения (6) в полном виде не представляется возможным. Однако его можно упростить, используя ряд обоснованных допущений.

Пусть α_0 - значение угловой координаты в начальной точке спуска. Т.к., в силу самой постановки задачи, склон представляет собой кривую большого радиуса кривизны, то функцию $\sqrt[3]{Z}$ можно разложить в ряд в окрестности начальной точки:

$$\sqrt[3]{Z} \approx Z_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} Z_0^{-\frac{2}{3}} (Z - Z_0), \quad (7)$$

где

$$Z_0 = U_0^3 = \left(\frac{V_0}{R}\right)^3. \quad (8)$$

Здесь V_0 - скорость на подъезде к спуску.

В итоге приходим к приближенному линейному уравнению первого порядка

$$\frac{dZ}{d\alpha} + \left(sf'(\alpha)Z_0^{-\frac{2}{3}} - 3k \right) Z + 2sf'(\alpha)Z_0^{\frac{1}{3}} = -p. \quad (9)$$

Решение этого уравнения ищем методом вариации постоянной.

Тогда получаем

$$Z = C \exp(3k\alpha + sZ_0^{-2/3}(\cos \alpha + k \sin \alpha)), \quad (10)$$

где функция C определяется из уравнения

$$\frac{dC}{d\alpha} \exp(3k\alpha + sZ_0^{-2/3}(\cos \alpha + k \sin \alpha)) = -2sf'(\alpha)Z_0^{1/3} - p. \quad (11)$$

Отсюда

$$C = - \int \frac{2sf'(\alpha)Z_0^{1/3} + p}{\exp(3k\alpha + sZ_0^{-2/3} f'(\alpha))} d\alpha, \quad (12)$$

где $f'(\alpha) = \cos \alpha + k \sin \alpha$

Соотношения (10) и (12) дают аналитическое решение задачи (9).

Характерный радиус кривизны участка спуска можно оценить по горизонтальной длине этого участка L_1 и его глубине h_1 :

$$R_1 = \frac{L_1^2 + h_1^2}{2h_1}. \quad (13)$$

Значение начального угла

$$\alpha_0 = \arcsin(L_1/R_1). \quad (14)$$

Во многих случаях длина участка спуска существенно превышает его глубину. Тогда можно еще более упростить решение уравнения движения.

Действительно, в этом случае можно в уравнении (9) использовать усредненное значение функции $f(\alpha)$:

$$f = \bar{f}(\alpha) = \frac{1}{\alpha_0} \int_{\alpha_0}^0 f(\alpha) d\alpha = \frac{kL_1 - h_1}{R_1 \alpha_0}. \quad (15)$$

Уравнение (9) при этом приобретает вид

$$\frac{dZ}{d\alpha} + \left(sf \left(\frac{V_0}{R_1}\right)^{-2} - 3k \right) Z = -2sf \frac{V_0}{R_1} - p. \quad (16)$$

Его аналитическое решение выглядит следующим образом:

$$Z = \frac{B}{A} + \left(Z_0 - \frac{B}{A} \right) \exp(A(\alpha_0 - \alpha)), \quad (17)$$

где

$$A = \left(sf \left(\frac{V_0}{R_1}\right)^{-2} - 3k \right), \quad B = -2sf \frac{V_0}{R_1} - p. \quad (18)$$

Скорость автомобиля в данной точке спуска соответственно равна

$$V = R_1 \sqrt[3]{Z}. \quad (19)$$

Его линейное ускорение в данной точке составляет

$$a = \frac{R_1}{3} \left(\frac{B}{A} = \left(Z_0 - \frac{B}{A} \right) \exp(A(\alpha_0 - \alpha)) \right)^{-2/3} \exp(-A(\alpha_0 - \alpha)). \quad (20)$$

Рассмотрим теперь участок подъема.

Уравнения движения на подъеме (участок L_2) в подвижной системе координат, связанной с автомобилем, выглядят следующим образом:

$$mR\ddot{\beta} = -mg \sin \beta - kN + \frac{W}{R\dot{\beta}}, \quad (21)$$

$$N - mg \cos \beta = mR\dot{\beta}^2. \quad (22)$$

Суммарное уравнение движения в данном случае выглядит следующим образом

$$\ddot{\beta} + k\dot{\beta}^2 - \frac{W}{mR^2} \frac{1}{\dot{\beta}} + \frac{g}{R} (\sin \beta + k \cos \beta) = 0. \quad (23)$$

После выкладок, аналогичных проделанным выше, приходим к уравнению

$$\frac{1}{3} \frac{dZ}{d\beta} + kZ + sf_1(\beta) \sqrt[3]{Z} = p, \quad (24)$$

где $f(\alpha) = \sin \beta + k \cos \beta$, $Z = (\dot{\beta})^3$.

Затем, вновь разлагая функцию Z в пределе большого радиуса кривизны поверхности дороги, приходим к линейному уравнению

$$\frac{dZ}{d\alpha} + \left(sf(\alpha) Z_0^{-\frac{2}{3}} + 3k \right) Z + 2sf(\alpha) Z_0^{\frac{1}{3}} = p. \quad (25)$$

Аналитическое решение этого уравнения имеет вид:

$$Z = \frac{B}{A} + \left(Z_0 - \frac{B}{A} \right) \exp(A\beta), \quad (26)$$

где

$$A = \left(sf \left(\frac{V_0}{R_1} \right)^{-2} + 3k \right), \quad B = -2sf \frac{V_0}{R_1} + p. \quad (27)$$

Рассмотрим далее движение по возвышенной части дороги (холм) (рисунок 2).

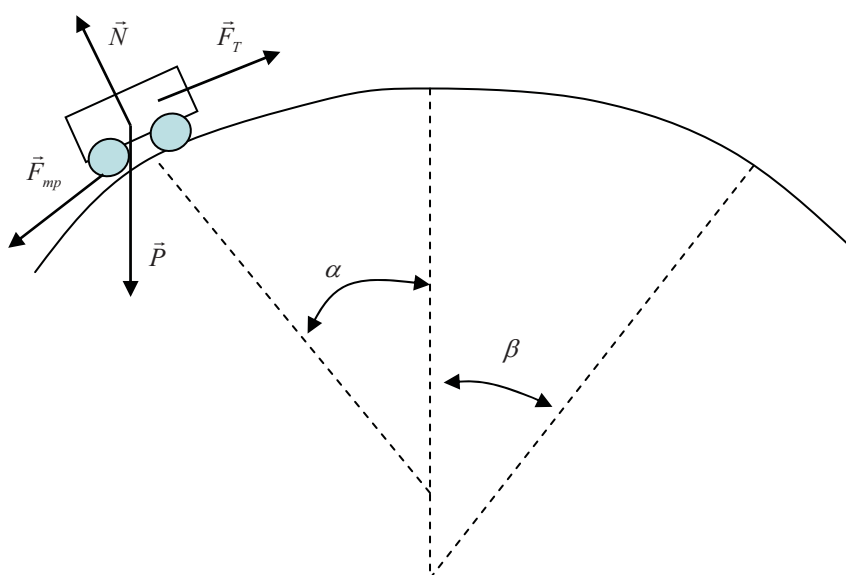


Рисунок 2. Схема движения автомобиля по возвышенности большого масштаба

Уравнения движения на подъеме (участок L_1) в подвижной системе координат, связанной с автомобилем, выглядят следующим образом:

$$-mR\ddot{\alpha} = -mg \sin \alpha - kN + \frac{W}{R\dot{\alpha}}, \quad (28)$$

$$-N + mg \cos \alpha = mR\dot{\alpha}^2. \quad (29)$$

Суммарное уравнение движения

$$\ddot{\alpha} + k\dot{\alpha}^2 + \frac{W}{mR^2} \frac{1}{\dot{\alpha}} - \frac{g}{R} (\sin \alpha + k \cos \alpha) = 0, \quad (30)$$

После замен, аналогичных проведенным выше, получаем

$$\frac{1}{3} \frac{dZ}{d\alpha} + kZ - sf(\alpha)\sqrt{Z} = -p. \quad (31)$$

Аналитическое решение уравнения (31) в приближении большого радиуса кривизны поверхности имеет вид:

$$Z = \frac{B}{A} + \left(Z_0 - \frac{B}{A} \right) \exp(A(\alpha_0 - \alpha)), \quad (32)$$

где

$$A = \left(sf \left(\frac{V_0}{R_1} \right)^{-2} - 3k \right), \quad B = 2sf \frac{V_0}{R_1} + p. \quad (33)$$

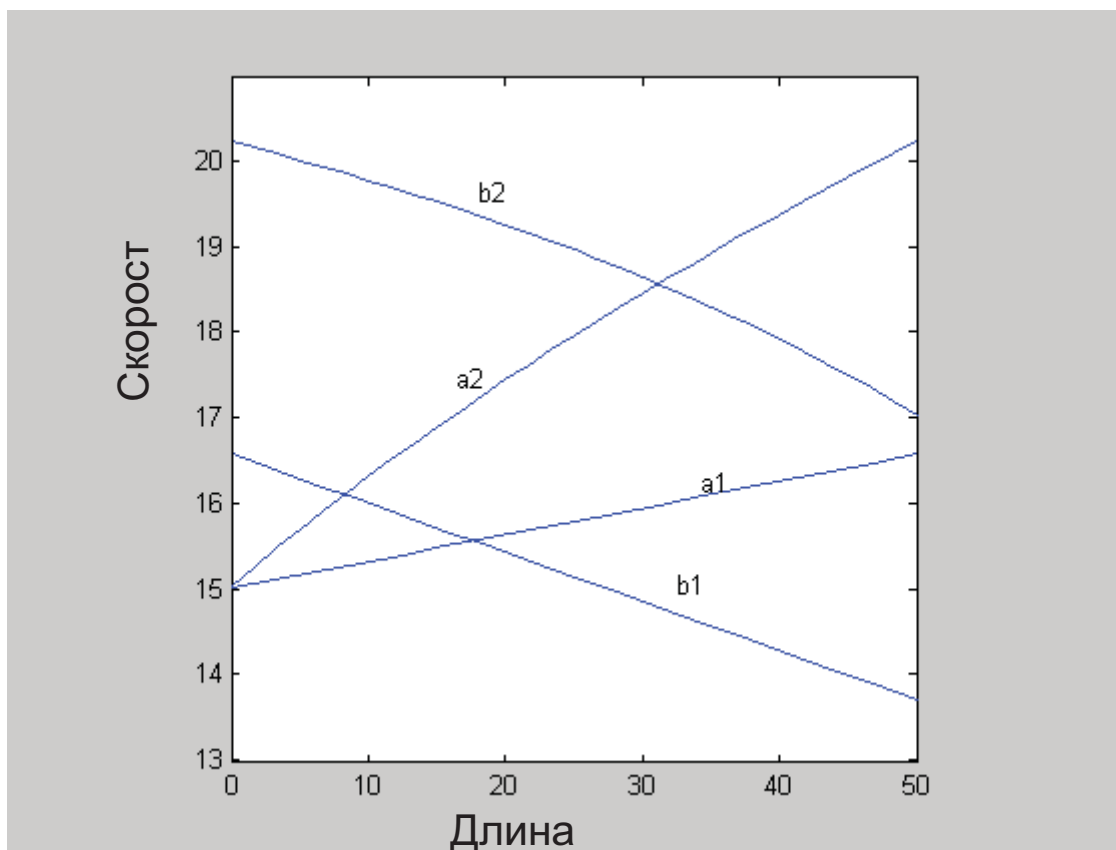
Для спуска с холма аналогичным образом получаем

$$Z = \frac{B}{A} + \left(Z_0 - \frac{B}{A} \right) \exp(A\beta), \quad (34)$$

где

$$A = \left(sf \left(\frac{V_0}{R_1} \right)^{-2} + 3k \right), \quad B = 2sf \frac{V_0}{R_1} - p. \quad (35)$$

На рисунке 3 приведены некоторые результаты численных экспериментов по изложенной модели для случая спуска и подъема транспортного средства при пересечении углубления.



a1- спуск на глубину 2м; b1- последующий подъем с нижней точки на высоту 3м;
a2- спуск на глубину 4м; b2 – последующий подъем на высоту 3м.

Рисунок 3. Результаты численного эксперимента

Для расчета были выбраны следующие исходные данные: начальная скорость транспортного средства $V_0 = 15$ м/с; длины участков спуска и подъема $L_1 = L_2 = 50$ м; глубины спуска указаны в подписях к рисунку; коэффициент трения $k=0,15$; масса транспортного средства $m = 1500$ кг; мощность двигателя $W = 100$ Квт.

Результаты численного эксперимента показывают, что предложенная в настоящей работе простая модель позволяет определить кинематические характеристики транспортного средства, которые могут быть использованы для определения режимов работы двигателя при движении на негоризонтальных участках дороги. Эта информация важна для расчета расхода топлива и определения выбросов токсичных веществ при движении по пересеченной местности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дрю Д. Теория транспортных потоков и управление ими /Под редакцией чл. – корр. АН СССР Бусленко Е.Г. М., Транспорт, 1972, 357 с.
2. Бабков В.Ф. Дорожные условия и безопасность движения. М., Транспорт, 1993, 271 с.
3. Белюченко И.С. Антропогенная экология. Краснодар, КГАУ, 1995, 180 с.
4. Методика определения выбросов автотранспорта для проведения сводных расчетов загрязнения атмосферы городов. РНД 211.2.02.11-2004. Издание официальное, Астана, 2004